Statistica: principi e metodi

Capitolo 9

Analisi delle distribuzioni doppie: dipendenza

Tabella di contingenza

Tabella di contingenza: sinonimo di **distribuzione doppia di frequenze**, ossia di distribuzione di frequenze secondo due caratteri.

esempio

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	4459	11562	10693	11071	**37785**
da 35 a 54	9174	26455	22647	23160	**81436**
oltre 55	14226	20060	11125	10597	**56008**
Totale	**27859**	**58077**	**44465**	**44828**	**175229**

Il numero che appare in una data casella è la frequenza delle unità che presentano le modalità che corrispondono a tale casella (in alto e nel margine sinistro).

Tabella di contingenza: distribuzione marginale (1)

Le frequenze che appaiono nell'ultima riga, pari ai totali di colonna, si riferiscono unicamente al carattere "Grado d'istruzione"; esse configurano, insieme alle modalità, la **distribuzione marginale** del carattere in questione.

esempio

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	4459	11562	10693	11071	37785
da 35 a 54	9174	26455	22647	23160	81436
oltre 55	14226	20060	11125	10597	56008
Totale	27859	58077	44465	44828	175229

Tabella di contingenza: distribuzione marginale (2)

Le frequenze che appaiono nell'ultima colonna, pari ai totali di riga, si riferiscono unicamente al carattere "Età"; esse configurano, insieme alle modalità, la **distribuzione marginale** del carattere in questione.

esempio

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	4459	11562	10693	11071	37785
da 35 a 54	9174	26455	22647	23160	81436
oltre 55	14226	20060	11125	10597	56008
Totale	27859	58077	44465	44828	175229

Tabella di contingenza in simboli

Carattere X	Carattere Y						Totale
	y_1	y_2	...	y_j	...	y_t	
x_1	n_{11}	n_{12}	⋮	n_{1j}	⋮	n_{1t}	n_{10}
x_2	n_{21}	n_{22}	⋮	n_{2j}	⋮	n_{2t}	n_{20}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	n_{i1}	n_{i2}	⋮	n_{ij}	⋮	n_{it}	n_{i0}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_s	n_{s1}	n_{s2}	⋮	n_{sj}	⋮	n_{st}	n_{s0}
Totale	n_{01}	n_{02}	⋮	n_{0j}	⋮	n_{0t}	N

- questi simboli indicano modalità di caratteri qualitativi, oppure valori o classi di caratteri quantitativi (s è il numero di modalità di X, t il numero di modalità di Y)
- n_{ij} è la frequenza della coppia di modalità (x_i, y_j) -**FREQUENZE CONGIUNTE**
- n_{i0} e n_{0j} sono i totali di riga e di colonna -**FREQUENZE MARGINALI**

Tabella di contingenza: percentuali sul totale

esempio

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 3 anni	
da 25 a 34	2.5%	6.6%	6.1%	6.3%	***21.6%***
da 35 a 54	5.2%	***15.1%***	12.9%	13.2%	***46.5%***
oltre 55	8.1%	11.4%	6.3%	6.0%	***32.0%***
Totale	***15.9%***	***33.1%***	***25.4%***	***25.6%***	100%

La percentuale che appare in una data casella indica la frequenza percentuale delle unità del collettivo in esame che presentano le modalità che corrispondono a tale casella (in alto e nel margine sinistro).

*Ad esempio il 15.1% **delle unità statistiche del collettivo** statistico in esame hanno un'età compresa fra i 35 e 54 ed il diploma di scuola superiore*

Tabella di contingenza: percentuali sul totale in simboli

Carattere X	Carattere Y						Totale
	y_1	y_2	...	y_j	...	y_t	
x_1	p_{11}	p_{12}	⋮	p_{1j}	⋮	p_{1t}	p_{10}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	p_{i1}	p_{i2}	⋮	p_{ij}	⋮	p_{it}	p_{i0}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_s	p_{s1}	p_{s2}	⋮	p_{sj}	⋮	p_{st}	p_{s0}
Totale	p_{01}	p_{02}	⋮	p_{0j}	⋮	p_{0t}	100

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{N} \times 100$$

Frequenza percentuale congiunta della modalità (x_i, y_j)

$$p_{i0} = \frac{n_{i0}}{N} \times 100$$

Frequenza percentuale marginale della modalità x_i

$$p_{0j} = \frac{n_{0j}}{N} \times 100$$

Frequenza percentuale marginale della modalità y_j

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} p_{ij} = 100$$

$$\sum_{i=1}^{s} p_{i0} = 100$$

$$\sum_{j=1}^{t} p_{0j} = 100$$

Tabella di contingenza: distribuzioni condizionate (1)

Se, invece, associamo alle modalità del carattere "Grado d'istruzione" le frequenze di una riga interna della tabella, otteniamo una **distribuzione condizionata**.

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	4459	11562	10693	11071	37785
da 35 a 54	9174	26455	22647	23160	81436
oltre 55	14226	20060	11125	10597	56008
Totale	27859	58077	44465	44828	175229

Prendere una distribuzione condizionata equivale a considerare la distribuzione del carattere "Grado d'istruzione" limitatamente ai casi in cui il carattere età è compreso ad esempio nell'intervallo 35-54.

Tabella di contingenza: distribuzioni condizionate (2)

Se, invece, associamo alle modalità del carattere "Età" le frequenze di una colonna interna della tabella, otteniamo una **distribuzione condizionata**.

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	4459	11562	10693	11071	37785
da 35 a 54	9174	26455	22647	23160	81436
oltre 55	14226	20060	11125	10597	56008
Totale	27859	58077	44465	44828	175229

Prendere una distribuzione condizionata equivale a considerare la distribuzione del carattere "Età" limitatamente ai casi in cui il carattere Grado di istruzione è uguale ad esempio al diploma di scuola superiore

Distribuzione marginale e distribuzioni condizionate di Y in simboli

Le due righe segnalate in rosso configurano la **distribuzione marginale del carattere *Y***. Le due righe segnalate in giallo configurano la **generica distribuzione condizionata di Y rispetto ad una data modalità di X**

Carattere *X*	Carattere *Y*						Totale
	y_1	y_2	...	y_j	...	y_t	
x_1	n_{11}	n_{12}	⋮	n_{1j}	⋮	n_{1t}	n_{10}
x_2	n_{21}	n_{22}	⋮	n_{2j}	⋮	n_{2t}	n_{20}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	n_{i1}	n_{i2}	⋮	n_{ij}	⋮	n_{it}	n_{i0}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_s	n_{s1}	n_{s2}	⋮	n_{sj}	⋮	n_{st}	n_{s0}
Totale	n_{01}	n_{02}	⋮	n_{0j}	⋮	n_{0t}	N

Le distribuzioni condizionate di Y rispetto ad X sono in numero pari al numero di modalità del carattere X (s)

Distribuzione marginale e distribuzioni condizionate di X in simboli

Le due righe segnalate in rosso configurano la **distribuzione marginale del carattere X**. Le due righe segnalate in giallo configurano la **generica distribuzione condizionata di X rispetto ad una data modalità di Y**

Carattere X	Carattere Y						Totale
	y_1	y_2	...	y_j	...	y_t	
x_1	n_{11}	n_{12}	⋮	n_{1j}	⋮	n_{1t}	n_{10}
x_2	n_{21}	n_{22}	⋮	n_{2j}	⋮	n_{2t}	n_{20}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	n_{i1}	n_{i2}	⋮	n_{ij}	⋮	n_{it}	n_{i0}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_s	n_{s1}	n_{s2}	⋮	n_{sj}	⋮	n_{st}	n_{s0}
Totale	n_{01}	n_{02}	⋮	n_{0j}	⋮	n_{0t}	N

Le distribuzioni condizionate di X rispetto ad Y sono in numero pari al numero di modalità del carattere Y (t)

Tabella di contingenza: confronto delle distribuzioni condizionate

L'idea che sarà sviluppata è quella di confrontare le distribuzioni condizionate di un carattere rispetto alle modalità dell'altro per stabilire se i due caratteri sono legati.
Questo confronto non può che essere effettuato **prendendo le frequenze relative o percentuali di riga (o di colonna)** delle distribuzioni da confrontare.
Una distribuzione marginale o condizionata in cui si considerano le frequenze relative o percentuali (*sul totale di riga o di colonna*) verrà qualificata come **normalizzata** *(ad 1 se si considerano le frequenze relative, a 100 se si considerano le frequenze percentuali).*

I caratteri possono essere di natura qualsiasi.

Tabella di contingenza: confronto delle distribuzioni condizionate- esempio

Esempio: si vuole stabilire se il carattere "Grado d'istruzione" sia legato all'età; in altre parole, si vuole accertare se l'appartenenza a una data classe di età influisca, determini, in qualche misura, i livelli di istruzione degli individui di quella classe.

Non è possibile confrontare direttamente le frequenze assolute registrate da una data modalità del grado di istruzione nelle diverse classi di età perché per ogni classe di età si registra un numero diverso di unità statistiche (*frequenza marginale di riga*).

Per effettuare il confronto si possono calcolare le **percentuali** (o le ***proporzioni***) sul totale di riga **normalizzando** in tal modo i sotto-collettivi distinti per classe di età: **si considera un sotto-collettivo di numerosità 100 (o *1*) per ogni classe di età**

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	4459	11562	10693	11071	**37785**
da 35 a 54	9174	26455	22647	23160	**81436**
oltre 55	14226	20060	11125	10597	**56008**
Totale	**27859**	**58077**	**44465**	**44828**	**175229**

Tabella di contingenza: percentuali sul totale di riga
(distribuzione percentuale di Y condizionata ad X)

esempio

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 3 anni	
da 25 a 34	11.8%	30.6%	28.3%	29.3%	**100%**
da 35 a 54	11.3%	***32.5%***	27.8%	28.4%	**100%**
oltre 55	25.4%	35.8%	19.9%	18.9%	**100%**
Distribuzione marginale % del grado di istruzione	***15.9%***	***33.1%***	***25.4%***	***25.6%***	**100%**

La percentuale che appare in una data casella indica la percentuale delle unità del sotto-collettivo di età compresa nella classe indicata in riga che presentano il grado di istruzione indicato in colonna.

Ad esempio il 32.5% delle unità statistiche che hanno un'età compresa fra i 35 e 54 ha il diploma di scuola superiore

Distribuzione percentuale di Y condizionata ad X in simboli

Carattere X	Carattere Y						Totale
	y_1	y_2	...	y_j	...	y_t	
x_1	$p_{1/x1}$	$p_{2/x1}$	⋮	$p_{j/x1}$	⋮	$p_{t/x1}$	100
x_2	$p_{1/x2}$	$p_{2/x2}$	⋮	$p_{j/x2}$	⋮	$p_{t/x2}$	100
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	$p_{1/xi}$	$p_{2/xi}$	⋮	$p_{j/xi}$	⋮	$p_{t/xi}$	100
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_s	$p_{1/xs}$	$p_{2/xs}$	⋮	$p_{j/xs}$	⋮	$p_{t/xs}$	100
Distribuzione % marginale di y	p_{01}	p_{02}	⋮	p_{0j}	⋮	p_{0t}	100

$$p_{j/x_i} = \frac{n_{ij}}{n_{i0}} \times 100$$

Frequenza percentuale della modalità y_j condizionata alla modalità x_i

$$\sum_{j=1}^{t} p_{j/xi} = 100, \quad i = 1,2,\ldots,s$$

$$p_{0j} = \frac{n_{0j}}{N} \times 100$$

Frequenza percentuale marginale della modalità y_j

Tabella di contingenza: confronto delle distribuzioni condizionate- esempio (2)

Esempio: se si volesse confrontare la composizione in termini di età di ogni sotto-collettivo omogeneo rispetto al titolo di studio, si dovrebbero calcolare le **percentuali** (o le ***proporzioni***) sul totale di colonna **normalizzando** in tal modo i sotto-collettivi distinti per grado di istruzione: **si considera un sotto-collettivo di numerosità 100 (o *1*) per ogni livello di istruzione**

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	4459	11562	10693	11071	**37785**
da 35 a 54	9174	26455	22647	23160	**81436**
oltre 55	14226	20060	11125	10597	**56008**
Totale	**27859**	**58077**	**44465**	**44828**	**175229**

Tabella di contingenza: percentuali sul totale di colonna (distribuzione percentuale di X condizionata ad Y)

esempio

Età	Grado d'istruzione				Distribuzione % marginale dell'età
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 3 anni	
da 25 a 34	16.0%	19.9%	24.0%	24.7%	***21.6%***
da 35 a 54	32.9%	***45.6%***	50.9%	51.7%	***46.5%***
oltre 55	51.1%	34.5%	25.0%	23.6%	***32.0%***
Totale	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

La percentuale che appare in una data casella indica la percentuale delle unità del sotto-collettivo omogeneo rispetto al grado di istruzione indicato in colonna che hanno età nella classe indicata in riga

Ad esempio il 45.6% delle unità statistiche aventi il diploma di scuola superiore ha un'età compresa fra 35 e 54 anni

Distribuzione percentuale di X condizionata ad Y in simboli

Carattere X	Carattere Y						Distribuzione % marginale di X
	y_1	y_2	...	y_j	...	y_t	
x_1	$p_{1/y1}$	$p_{1/y2}$	⋮	$p_{1/yj}$	⋮	$p_{1/yt}$	p_{10}
x_2	$p_{2/y1}$	$p_{2/y2}$	⋮	$p_{2/yj}$	⋮	$p_{2/yt}$	p_{20}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	$p_{i/y1}$	$p_{i/y2}$	⋮	$p_{i/yj}$	⋮	$p_{i/yt}$	p_{i0}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_s	$p_{s/y1}$	$p_{s/y2}$	⋮	$p_{s/yj}$	⋮	$p_{s/yt}$	p_{s0}
Totale	100	100	⋮	100	⋮	100	100

$$p_{i/y_j} = \frac{n_{ij}}{n_{0j}} \times 100$$

Frequenza percentuale della modalità x_i condizionata alla modalità y_j

$$\sum_{i=1}^{s} p_{i/yj} = 100, \quad j = 1,2,\ldots,t$$

$$p_{i0} = \frac{n_{i0}}{N} \times 100$$

Frequenza percentuale marginale della modalità y_j

Confronto delle distribuzioni condizionate- esempio

	Numero di Laureati			Percentuali riga			Percentuali colonna		
Gruppo di lauree	*Uomini*	*Donne*	*Totale*	*Uomini*	*Donne*	*Totale*	*Uomini*	*Donne*	*Totale*
agrario	2002	1664	*3666*	54.6%	45.4%	100%	2.7%	1.5%	**2.0%**
architettura	4544	5022	*9566*	47.5%	52.5%	100%	6.2%	4.5%	**5.2%**
chimico-farmaceutico	1954	3299	*5253*	37.2%	62.8%	100%	2.7%	3.0%	**2.8%**
economico-statistico	12286	13417	*25703*	47.8%	52.2%	100%	16.7%	12.1%	**13.9%**
educazione fisica	2002	1341	*3343*	59.9%	40.1%	100%	2.7%	1.2%	**1.8%**
geo-biologico	3264	6627	*9891*	33.0%	67.0%	100%	4.4%	6.0%	**5.4%**
giuridico	3948	6413	*10361*	38.1%	61.9%	100%	5.4%	5.8%	**5.6%**
ingegneria	16832	5315	*22147*	76.0%	24.0%	100%	22.9%	4.8%	**12.0%**
insegnamento	672	8789	*9461*	7.1%	92.9%	100%	0.9%	7.9%	**5.1%**
letterario	4757	11702	*16459*	28.9%	71.1%	100%	6.5%	10.5%	**8.9%**
linguistico	1570	9335	*10905*	14.4%	85.6%	100%	2.1%	8.4%	**5.9%**
medico	6802	13503	*20305*	33.5%	66.5%	100%	9.3%	12.2%	**11.0%**
politico-sociale	7500	13990	*21490*	34.9%	65.1%	100%	10.2%	12.6%	**11.6%**
psicologico	1677	8677	*10354*	16.2%	83.8%	100%	2.3%	7.8%	**5.6%**
scientifico	3680	1896	*5576*	66.0%	34.0%	100%	5.0%	1.7%	**3.0%**
Totale	*73490*	*110990*	*184480*	**39.8%**	**60.2%**	100%	100%	100%	**100%**

Elaborazione su dati Almalaurea -XV Indagine (2013) - Condizione occupazionale dei laureati

Analisi delle relazioni di una distribuzione doppia con caratteri di natura qualsiasi

Data la distribuzione congiunta di due caratteri di natura qualsiasi, i quesiti a cui la statistica deve rispondere sono

- esiste **dipendenza** o **indipendenza** fra i due caratteri?
- se esiste dipendenza, come sono associate le modalità dei due caratteri?

Analisi delle relazioni di una distribuzione doppia con caratteri di natura qualsiasi: indipendenza

Su un collettivo di 180 studenti della D'annunzio , distinti per sesso, è stata rilevata la frequenza con cui accedono al servizio mensa

Indipendenza

	Frequenza della mensa			
Sesso	Raramente	A volte	Spesso	**Totale**
Maschio	10	20	30	**60**
Femmina	20	40	60	**120**
Totale	**30**	**60**	**90**	**180**

	Frequenza della mensa			
Sesso	Raramente	A volte	Spesso	**Totale**
Maschio	16.7%	33.3%	50.0%	100%
Femmina	16.7%	33.3%	50.0%	100%
Totale	**16.7%**	**33.3%**	**50.0%**	**100%**

La frequenza con cui accede al servizio mensa dipende dal sesso dello studente?

Dalla tabella delle **percentuali sul totale di riga** si vede come per ogni modalità di frequenza del servizio mensa le percentuali di maschi e di femmine sono uguali: la frequenza **non dipende** dal sesso dello studente

Analisi delle relazioni di una distribuzione doppia con caratteri di natura qualsiasi: dipendenza perfetta

Su un collettivo di 150 lavoratori viene registrato il titolo di studio e la qualifica professionale all'interno dell'azienda

Dipendenza perfetta

	Qualifica professionale			
Titolo di studio	Bassa	Media	Alta	**Totale**
Licenza elementare	10	0	0	**10**
Licenza media	20	0	0	**20**
Diploma	0	70	0	**70**
Laurea	0	0	50	**50**
Totale	30	70	50	**150**

La qualifica professionale dipende dal titolo di studio?

Si registra una **dipendenza perfetta** della qualifica professionale dal titolo di studio

*Un carattere Y **dipende perfettamente** da X quando ad ogni modalità di X è associata una sola modalità di Y.*

Non è un relazione bidirezionale

Analisi delle relazioni di una distribuzione doppia con caratteri di natura qualsiasi: interdipendenza perfetta

Su un collettivo di 45 dipendenti di un'azienda si rileva la categoria professionale e la classe retributiva

Interdipendenza perfetta

	Classe retributiva			
Categoria	*25000-28000*	*28000-33500*	*33500-45000*	Totale
Operatore	25	0	0	**25**
Collaboratore	0	15	0	**15**
Funzionario	0	0	5	**5**
Totale	**25**	**15**	**5**	**45**

Il livello retributivo dipende dalla categoria professionale?

Si registra una **interdipendenza perfetta**

*Tra due caratteri sussiste **interdipendenza perfetta** se ad ogni modalità di uno dei due caratteri corrisponde una e una sola modalità dell'altro carattere e viceversa*

È una relazione bidirezionale

Analisi delle relazioni di una distribuzione doppia con caratteri di natura qualsiasi: dipendenza

valori assoluti

Gruppo di lauree	*Lavora*	*Non lavora ma cerca*	*Impegnato in corso universitario/ praticantato*	*Non lavora e non cerca e non è impegnato*	*Totale*
agrario	1767	1111	645	143	**3666**
architettura	4496	2650	2085	335	**9566**
chimico-farmaceutico	2626	1361	1045	221	**5253**
economico-statistico	11412	7351	6272	668	**25703**
educazione fisica	2237	692	324	90	**3343**
geo-biologico	3037	2898	3620	336	**9891**
giuridico	2818	3647	3699	197	**10361**
ingegneria	10187	3699	7774	487	**22147**
insegnamento	6784	1996	407	274	**9461**
letterario	7160	5020	3588	691	**16459**
linguistico	5201	3359	1952	393	**10905**
medico	12467	4954	1970	914	**20305**
politico-sociale	11068	6855	2772	795	**21490**
psicologico	4255	2972	2775	352	**10354**
scientifico	2549	836	2007	184	**5576**
Totale	***88064***	***49401***	***40935***	***6080***	***184480***

Elaborazione su dati Almalaurea -XV Indagine (2013) - Condizione occupazionale dei laureati

Analisi delle relazioni di una distribuzione doppia con caratteri di natura qualsiasi: dipendenza

% riga

Gruppo di lauree	*Lavora*	*Non lavora ma cerca*	*Impegnato in corso universitario/ praticantato*	*Non lavora e non cerca e non è impegnato*	*Totale*
agrario	48.2%	30.3%	17.6%	3.9%	100%
architettura	47.0%	27.7%	21.8%	3.5%	100%
chimico-farmaceutico	50.0%	25.9%	19.9%	4.2%	100%
economico-statistico	44.4%	28.6%	24.4%	2.6%	100%
educazione fisica	**66.9%**	20.7%	9.7%	2.7%	100%
geo-biologico	30.7%	29.3%	**36.6%**	3.4%	100%
giuridico	27.2%	**35.2%**	**35.7%**	1.9%	100%
ingegneria	46.0%	16.7%	**35.1%**	2.2%	100%
insegnamento	**71.7%**	21.1%	4.3%	2.9%	100%
letterario	43.5%	30.5%	21.8%	4.2%	100%
linguistico	47.7%	30.8%	17.9%	3.6%	100%
medico	**61.4%**	24.4%	9.7%	4.5%	100%
politico-sociale	51.5%	**31.9%**	12.9%	3.7%	100%
psicologico	41.1%	28.7%	26.8%	3.4%	100%
scientifico	45.7%	15.0%	**36.0%**	3.3%	100%
% condizione occupazionale	**47.7%**	**26.8%**	**22.2%**	**3.3%**	**100%**

Elaborazione su dati Almalaurea -XV Indagine (2013) - Condizione occupazionale dei laureati

Dipendenza statistica: connessione

Alla luce delle considerazioni precedenti, possiamo dare una definizione del concetto di dipendenza statistica con riferimento a una tabella di contingenza.

Il carattere *Y (X)* **dipende** dal carattere *X (Y)* se **le distribuzioni condizionate normalizzate sono diverse** tra loro.

All'opposto:

Si dice che il carattere *Y (X)* **non dipende** dal carattere *X (Y)* quando **le distribuzioni condizionate normalizzate sono uguali** tra loro.

Frequenze congiunte in caso di indipendenza

Situazione di indipendenza

	Frequenza della mensa			
	Raramente	A volte	Spesso	**Tot**
M	10	20	30	**60**
F	20	40	60	**120**
Tot	**30**	**60**	**90**	**180**

	Frequenza della mensa			
	Raramente	A volte	Spesso	**Totale**
M	16.7%	33.3%	50.0%	100%
F	16.7%	33.3%	50.0%	100%
Tot	16.7%	33.3%	50.0%	100%

X e Y sono indipendenti se le distribuzioni delle frequenze percentuali condizionate di Y rispetto ad X sono uguali alla distribuzione percentuale marginale di Y (oppure se le distribuzioni delle frequenze percentuali condizionate di X rispetto ad Y sono uguali alla marginale di X).

$$p_{j/x_i} = p_{0j}$$

$$\frac{n_{ij}}{n_{i0}}100 = \frac{n_{0j}}{N}100 \qquad \forall i, j$$

Quindi nel caso di indipendenza esiste **proporzionalità** fra le frequenze assolute delle righe (o delle colonne).

$$n_{ij} : n_{i0} = n_{0j} : N \quad \forall i, j$$

Da tale relazione si vede come nel caso di indipendenza **le frequenze congiunte possono essere espresse come**

$$n_{ij} = \frac{n_{i0} \cdot n_{0j}}{N} \qquad \forall i, j$$

Misura della dipendenza

L'intensità della dipendenza viene misurata come allontanamento dalla condizione di indipendenza.

Per far questo si costruisce la **tabella teorica di indipendenza** che presenta in ogni casella la **frequenza teorica** di indipendenza.

$$\hat{n}_{ij} = \frac{n_{i0} \cdot n_{0j}}{N} \qquad \forall \mathrm{i}, \mathrm{j}$$

Per misurare la dipendenza si mette a confronto la tabella effettiva con quella teorica di indipendenza tramite le differenze

$$\text{frequenza effettiva} - \text{frequenza teorica} = n_{ij} - \hat{n}_{ij}$$

Costruzione della tabella teorica di indipendenza

$$\hat{n}_{ij} = \frac{n_{i0} \cdot n_{0j}}{N} \qquad \forall i, j$$

Calcolo delle frequenze teoriche.

$$\frac{37785 \cdot 27859}{175229}$$

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	6007.3				37785
da 35 a 54					81436
oltre 55					56008
Totale	27859	58077	44465	44828	175229

Per calcolare le frequenze teoriche si riscrive a tabella riportando solo i marginali di riga e di colonna ed il totale e poi per ogni casella si effettua il prodotto tra il totale di riga e il totale di colonna diviso per il totale generale.

Costruzione della tabella teorica di indipendenza

$$\hat{n}_{ij} = \frac{n_{i0} \cdot n_{0j}}{N} \qquad \forall i, j$$

Nella tabella che segue sono indicate in rosso le frequenze che si avrebbero se vi fosse indipendenza.

$$\frac{81436 \cdot 58077}{175229}$$

Età	Grado d'istruzione				
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	Totale
da 25 a 34	6007.3 4459	12523.3 11562	9588.1 10693	9666.4 11071	37785
da 35 a 54	12947.2 9174	26990.7 26455	20664.7 22647	20833.4 23160	81436
oltre 55	8904.5 14226	18563.0 20060	14212.2 11125	14328.3 10597	56008
Totale	27859	58077	44465	44828	175229

Le frequenze teoriche sono state ottenute nel modo seguente: in ogni casella si è posto il numero risultante dal prodotto tra il totale di riga e il totale di colonna diviso per il totale generale.

Indice di associazione chi-quadrato di Pearson

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} \frac{(n_{ij} - n_{io}n_{oj}/N)^2}{n_{io}n_{oj}/N} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}}$$

L'indice χ^2

- è sempre non negativo
- assume valore 0 nel caso di associazione nulla
- aumenta all'aumentare della dipendenza (o associazione dei due caratteri)
- a parità di associazione l'indice aumenta al crescere di *N* *(quindi dipende da N)*

Misura della dipendenza: calcolo dell'indice χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(n_{ij}-\hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}}$$

Età	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	**6007.3** 4459	**12523.3** 11562	**9588.1** 10693	**9666.4** 11071	*37785*
da 35 a 54	**12947.2** 9174	**26990.7** 26455	**20664.7** 22647	**20833.4** 23160	*81436*
oltre 55	**8904.5** 14226	**18563.0** 20060	**14212.2** 11125	**14328.3** 10597	*56008*
Totale	*27859*	*58077*	*44465*	*44828*	*175229*

$$\chi^2 = \frac{(4459-6007.3)^2}{6007.3} + \frac{(11562-12523.3)^2}{12523.3} + \cdots + \frac{(10597-14328.3)^2}{14328.3} = 7307.8$$

$$\frac{(n_{ij}-\hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}}$$

Età	Grado d'istruzione			
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni
da 25 a 34	399.1	73.8	127.3	204.1
da 35 a 54	1099.6	10.6	190.2	259.8
oltre 55	3180.2	120.7	670.6	971.7

Totale=7307.8

Indice di associazione quadratica media

Siccome l'indice χ^2 dipende da N, per eliminare l'influenza della numerosità delle osservazioni si può calcolare l'indice di associazione quadratica media

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(n_{ij}-\hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$$

- Nell'*esempio* precedente si ha

$$\psi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} = \sqrt{\frac{7307.8}{175229}} = 0.2$$

Indici di associazione relativi

L'indice ψ, e l'indice χ^2, vanno rapportati al massimo che possono assumere per poter esprimere un giudizio sul **grado di dipendenza**.

Si può dimostrare che il massimo di ψ è pari a

$$\max(\psi) = \sqrt{\min(s-1, t-1)}$$

Il massimo di χ^2 è

$$\max(\chi^2) = N \cdot \min(s-1, t-1)$$

Nella tabella di interdipendenza perfetta *(dove si deve avere s=t)* si ottiene il valore massimo

Interdipendenza perfetta: un esempio

$$\max(\chi^2) = N \cdot \min(s-1, t-1)$$

$$\max(\psi) = \sqrt{\min(s-1, t-1)}$$

X	y				Tot
	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	45	0	0	0	45
	10.4	4.6	8.6	21.3	
x_2	0	20	0	0	20
	4.6	2.1	3.8	9.5	
x_3	0	0	0	92	92
	21.3	9.5	17.5	43.6	
x_4	0	0	37	0	37
	8.6	3.8	7.1	17.5	
Tot	45	20	37	92	194

$$\frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}}$$

X	y			
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	114.4	4.7	8.6	21.3
x_2	4.7	156.1	3.8	9.5
x_3	21.3	9.5	17.5	53.6
x_4	8.6	3.8	127.1	17.5

Totale=582

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}} = 582$$

$$\psi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} = \sqrt{\frac{582}{194}} = \sqrt{3}$$

$$\max(\chi^2) = N \min(s-1, t-1) = 194 \cdot \min(4-1, 4-1) = 194 \cdot 3 = 582$$

$$\max(\psi) = \sqrt{\min(s-1, t-1)} = \sqrt{\min(4-1, 4-1)3} = \sqrt{3}$$

Indice simmetrico di connessione

Un indice normalizzato di connessione è l'**indice di Cramér**

$$C = \frac{\psi}{\sqrt{\min[(s-1),(t-1)]}}$$

dove min[(*s* – 1), (*t* – 1)] indica il minimo tra le due quantità tra parentesi quadra.

L'indice *C*

- è sempre compreso tra 0 e 1
- vale 0 nel caso di indipendenza
- vale 1 se
  - i due caratteri sono perfettamente associati e *s=t*
  - *X* dipende perfettamente da *Y* e *s<t*
  - *Y* dipende perfettamente da *X* e *s>t*

Misura normalizzata di dipendenza unilaterale

Se si considera la variabile Y come logicamente dipendente si può considerare una dipendenza unilaterale e rapportare l'indice ψ al suo massimo, ottenendo l'indice **normalizzatoa di dipendenza di Y da X**

$$C_y = \frac{\psi}{\sqrt{t-1}}$$

Analogamente, **se si considera la variabile X come logicamente dipendente** si può considerare una dipendenza unilaterale e rapportare l'indice ψ al suo massimo, ottenendo l'indice **normalizzato di dipendenza di X da Y**

$$C_x = \frac{\psi}{\sqrt{s-1}}$$

Misura normalizzata di dipendenza : esempio

Calcolo dell'indice C_Y per la tabella di contingenza

	Grado d'istruzione				Totale
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni	
da 25 a 34	4459	11562	10693	11071	37785
da 35 a 54	9174	26455	22647	23160	81436
oltre 55	14226	20060	11125	10597	56008
Totale	27859	58077	44465	44828	175229

$$\psi = 0.20$$

$$\max(\psi) = \sqrt{t-1} = \sqrt{3}$$

$$C_Y = \frac{0.20}{\sqrt{3}} = 0.12$$

Non si ha una forte dipendenza di Y da X

Interpretazione dell'associazione

Se non c'è indipendenza, per veder come si associano le modalità dei due caratteri si possono confrontare le frequenze osservate con le frequenze teoriche

Età	Grado d'istruzione			
	Non ha terminato le superiori	Diploma di scuola superiore	Università da 1 a 3 anni	Università oltre i 4 anni
da 25 a 34	**Neg.** 6007.3 4459	**Neg.** 12523.3 11562	**Pos.** 9588.1 10693	**Pos.** 9666.4 11071
da 35 a 54	**Neg.** 12947.2 9174	26990.7 26455	**Pos.** 20664.7 22647	**Pos.** 20833.4 23160
oltre 55	**Pos.** 8904.5 14226	**Pos.** 18563.0 20060	**Neg.** 14212.2 11125	**Neg.** 14328.3 10597

$n_{ij} > \hat{n}_{ij}$ Associazione positiva fra le modalità x_i e y_j

$n_{ij} < \hat{n}_{ij}$ Associazione negativa fra le modalità x_i e y_j

Interpretazione dell'associazione: esempio

Inclinazione politica	*Livello di accordo con l'affermazione*: È molto importante per me essere Italiano				
	per nulla d'accordo	*poco d'accordo*	*abbastanza d'accordo*	*molto d'accordo*	*Totale*
sinistra	Pos. 59 37.5	Pos. 110 84.5	51 64.6	14 47.4	*234*
centro	22 39.4	77 88.8	Pos. 84 68.0	Pos. 63 49.8	*246*
destra	6 10.1	9 22.7	15 17.4	Pos. 33 12.8	*63*
Totale	**87**	**196**	**150**	**110**	***543***

Inclinazione politica	*Livello di accordo con l'affermazione*: È molto importante per me essere Italiano				
	per nulla d'accordo	*poco d'accordo*	*abbastanza d'accordo*	*molto d'accordo*	Totale
sinistra	**25.2%**	**47.0%**	21.8%	6.0%	100%
centro	8.9%	31.3%	**34.1%**	**25.6%**	100%
destra	9.5%	14.3%	23.8%	**52.4%**	100%
Distribuzione % del livello di accordo	**16.0%**	**36.1%**	**27.6%**	**20.3%**	**100%**

Dipendenza in media

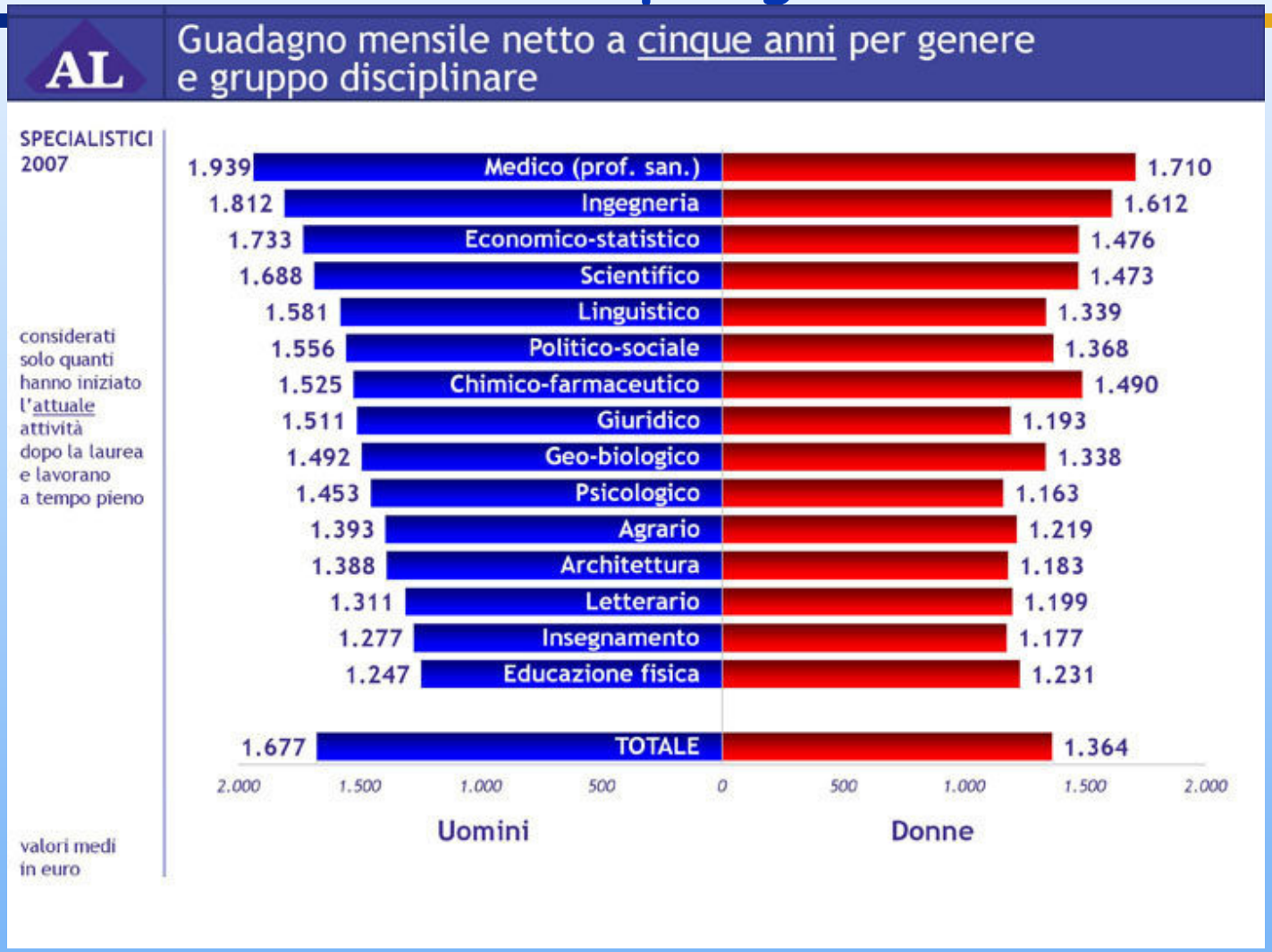
Supponendo che il **carattere *Y*** sia **quantitativo**, vogliamo studiare *l'influenza che le modalità del carattere X esercitano sulle medie delle distribuzioni condizionate.*

Si dice che il carattere *Y* dipende in media da *X* se le medie aritmetiche delle distribuzioni condizionate di *Y* sono diverse tra loro.

Viceversa, **se le medie aritmetiche sono uguali tra di loro si dice che *Y* è indipendente in media da *X*.**

Esempio di dipendenza in media (1): Guadagno mensile netto dei laureati di primo livello a 5 anni dalla laurea

Esempio di dipendenza in media (2): Guadagno mensile netto dei laureati specialistici a 5 anni dalla laurea distinti per genere



Esempio di dipendenza in media (3): Guadagno mensile netto dei laureati specialistici a 5 anni dalla laurea specialistica distinti per area di lavoro

Dipendenza in media: esempio

$$\mu_Y(x_i) = \frac{1}{n_{i0}} \sum_{j=1}^{t} y_j n_{ij}, \quad i = 1, \ldots, s$$

- Medie delle distribuzioni condizionate

Valori centrali

Età (X)	Massa muscolare (Y)				Totale
	51-65	66-80	81-95	96-120	
	58	73	88	108	
41-50	0	0	2	13	15
51-60	0	5	7	5	17
61-70	2	8	4	0	14
71-80	6	6	2	0	14
Totale	8	19	15	18	60

$$\mu_Y(x_1) = \frac{1}{15}(58 \cdot 0 + 73 \cdot 0 + 88 \cdot 2 + 108 \cdot 13) = \mathbf{105.33}$$

$$\mu_Y(x_2) = \frac{1}{17}(58 \cdot 0 + 73 \cdot 5 + 88 \cdot 7 + 108 \cdot 5) = \mathbf{89.47}$$

$$\mu_Y(x_3) = \frac{1}{14}(58 \cdot 2 + 73 \cdot 8 + 88 \cdot 4 + 108 \cdot 0) = \mathbf{75.14}$$

$$\mu_Y(x_4) = \frac{1}{14}(58 \cdot 6 + 73 \cdot 6 + 88 \cdot 2 + 108 \cdot 0) = \mathbf{68.71}$$

Dipendenza in media: esempio

continuazione

- Le medie delle distribuzioni condizionate sono:

$$\mu_Y(x_1) = 105.33$$
$$\mu_Y(x_2) = 89.47$$
$$\mu_Y(x_3) = 75.14$$
$$\mu_Y(x_4) = 68.71$$

- La media aritmetica della distribuzione marginale è

Valori centrali

Età (X)	Massa muscolare (Y)				Totale
	51-65 (58)	66-80 (73)	81-95 (88)	96-120 (108)	
41-50	0	0	2	13	15
51-60	0	5	7	5	17
61-70	2	8	4	0	14
71-80	6	6	2	0	14
Totale	8	19	15	18	60

$$\mu_Y = \frac{1}{60}(58 \cdot 8 + 73 \cdot 19 + 88 \cdot 15 + 108 \cdot 18) = \mathbf{85.25}$$

Come si vede, le medie delle distribuzioni condizionate sono tra loro diverse. Il carattere "Massa muscolare" dipende in media dal carattere "Età". *La domanda è se la dipendenza in media è forte oppure no.*

Relazione fra la media marginale e le medie condizionate

La **media della distribuzione marginale di *Y*** è la **media ponderata delle *s* medie condizionate**

$$\mu_y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{s}\mu_y(x_i)n_{i0}$$

media marginale

$$\mu_y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{t} y_j n_{0j}$$

medie condizionate

$$\mu_y(x_i) = \frac{1}{n_{i0}}\sum_{j=1}^{t} y_j n_{ij}, \quad i = 1,\ldots,s$$

$$\mu_y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{s}\mu_y(x_i)\cdot n_{i0} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{n_{i0}}\sum_{j=1}^{t} y_j n_{ij}\right)n_{i0} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} y_j n_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{t} y_j \sum_{i=1}^{s} n_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{t} y_j n_{0j}$$

Proprietà associativa della media aritmetica

Devianza spiegata *o fra i gruppi*: misura delle diversità fra le medie condizionate

La devianza delle medie condizionate, data da

$$D_S = \sum_{i=1}^{s} [\mu_y(x_i) - \mu_y]^2 n_{i0}$$

è una **misura della loro diversità**.

Questa quantità è nota come **devianza spiegata** o come ***devianza fra i gruppi*** poiché misura la distanza fra le medie dei singoli gruppi e la media generale.

Dipendenza in media: esempio *continuazione*

$$D_S = \sum_{i=1}^{s} [\mu_Y(x_i) - \mu_Y]^2 n_{i0},$$

Una misura della dipendenza in media è data dal grado di di diversità delle medie delle distribuzioni condizionate, come risulta dal calcolo che segue

Età (X)	Massa muscolare (Y)				Totale
	51-65 58	66-80 73	81-95 88	96-120 108	
41-50	0	0	2	13	15
51-60	0	5	7	5	17
61-70	2	8	4	0	14
71-80	6	6	2	0	14
Totale	8	19	15	18	60

$$D_S = (105.33 - 85.25)^2 \cdot 15$$

$$+ (89.47 - 85.25)^2 \cdot 17 + (75.14 - 85.25)^2 \cdot 14 + (68.71 - 85.25)^2 \cdot 14 = 11611.25$$

Per poter stabilire se la dipendenza in media è più o meno forte, bisogna confrontare l'indice calcolato con il massimo che esso può raggiungere.
Si può dimostrare che il massimo di D_S è dato dalla devianza della distribuzione marginale

$$D_Y = (58 - 85.25)^2 \cdot 8 + (73 - 85.25)^2 \cdot 19 + (88 - 85.25)^2 \cdot 15$$
$$+ (108 - 85.25)^2 \cdot 18 = 18221.25$$

Relazione fra la devianza totale e la devianza spiegata

La devianza della distribuzione marginale di Y può essere scritta come somma di due componenti:

$$\sum_{j=1}^{t}(y_j-\mu_Y)^2 n_{0j}=\sum_{i=1}^{s}[\mu_Y(x_i)-\mu_Y]^2 n_{i0}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}[y_j-\mu_Y(x_i)]^2 n_{ij}$$

Devianza totale D_Y = **Devianza spiegata D_S** + **Devianza residua D_R**

Devianza FRA i gruppi

Devianza ENTRO i gruppi

$$D_S=\sum_{i=1}^{s}[\mu_Y(x_i)-\mu_Y]^2 n_{i0}\le\sum_{j=1}^{t}(y_j-\mu_Y)^2 n_{0j}=D_Y$$

Dimostrazione della scomposizione della devianza

La devianza totale può essere scritta come

$$D_y = \sum_{j=1}^{t} (y_j - \mu_y)^2 \cdot n_{0j} = \sum_{j=1}^{t} (y_j - \mu_y)^2 \cdot \sum_{i=1}^{s} n_{ij} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} (y_j - \mu_y)^2 \, n_{ij}$$

Addizionando e sottraendo le medie condizionate si ha

$$D_y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \left[(y_j - \mu_y(x_i)) + (\mu_y(x_i) - \mu_y) \right]^2 n_{ij}$$

Dallo sviluppo del quadrato del binomio, si ha

$$D_y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} (y_j - \mu_y(x_i))^2 n_{ij} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} (\mu_y(x_i) - \mu_y)^2 n_{ij} + 2 \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \left[(y_j - \mu_y(x_i))(\mu_y(x_i) - \mu_y) \right] n_{ij}$$

Considerato che

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} (y_j - \mu_y(x_i))^2 n_{ij} = D_S$$

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} (\mu(x_i) - \mu_y)^2 n_{ij} = \sum_{i=1}^{s} (\mu_y(x_i) - \mu_y)^2 \sum_{j=1}^{t} n_{ij} = \sum_{i=1}^{s} (\mu_y(x_i) - \mu_y)^2 n_{i0} = D_R$$

$$2 \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \left[(y_j - \mu_y(x_i))(\mu_y(x_i) - \mu_y) \right] \cdot n_{ij} = 2 \sum_{i=1}^{s} (\mu_y(x_i) - \mu_y) \sum_{j=1}^{t} (y_j - \mu_y(x_i)) \cdot n_{ij} = 0$$

Si ha

$$D_y = D_R + D_S$$

$$\sum_{j=1}^{t} (y_j - \mu_y)^2 \cdot n_{0j} = \sum_{i=1}^{s} (\mu_y(x_i) - \mu_y)^2 n_{i0} + \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{s} (y_j - \mu_y(x_i))^2 n_{ij}$$

Rapporto di correlazione

Il **rapporto tra la devianza spiegata e la devianza totale** è chiamato **rapporto di correlazione**:

$$\eta_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{s}[\mu_Y(x_i) - \mu_Y]^2 n_{i0}}{\sum_{j=1}^{t}(y_j - \mu_Y)^2 n_{0j}} = \frac{D_S}{D_Y}$$

L'indice può essere scritto anche nella forma

$$\eta_y^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}[y_j - \mu_Y(x_i)]^2 n_{ij}}{\sum_{j=1}^{t}(y_j - \mu_Y)^2 n_{0j}} = 1 - \frac{D_R}{D_Y}$$

in quanto $D_S = D_Y - D_R$.

L'indice è compreso nell'intervallo [0, 1].

$$\eta_y^2 = \frac{D_S}{D_Y} = 1 - \frac{D_R}{D_Y} = \begin{cases} 0 & D_S = 0; D_R = D_Y \\ 1 & D_R = 0; D_S = D_Y \end{cases}$$

⇒ *indipendenza in media* $m_y(x_i)=m_y$, $i=1,\ldots,s$

⇒ *dipendenza in media massima*

Rapporto di correlazione: esempio

Come abbiamo visto:

$$D_S = 11611.25$$

$$D_Y = 18221.25$$

Età (X)	Massa muscolare (Y)				Totale
	51-65 58	66-80 73	81-95 88	96-120 108	
41-50	0	0	2	13	15
51-60	0	5	7	5	17
61-70	2	8	4	0	14
71-80	6	6	2	0	14
Totale	8	19	15	18	60

$$\eta_Y^2 = \frac{D_S}{D_Y} = \frac{11611.25}{18221.25} = 0.64$$