Scritto del 14 giugno 2018
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2017/18
Prof.ssa Claudia Ceci

1. Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ con Q misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria. Si assuma hazard rate deterministico γ_t^Q e tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Calcolare $Q(\tau \leq T | \tau > t)$ e $Q(\tau > T | \tau > t)$.
(ii) Determinare il prezzo, $p_1(t, T)$, di un DZCB di valore nominale 1 e con recupero $1 - \delta$ alla maturitá T $(0 < \delta < 1)$.
(iii) Sia oggi $(t = 0)$ il prezzo di un free-defaultable ZCB di maturitá $T = 2$ anni e valore nominale 100 euro pari a $p_0 = 50$ euro e quello di un DZCB (di stessa maturitá e valore nominale) e recupero $1 - \delta = 60\%$, pari a $p_1 = 40$ euro. Fornire una stima $\overline{\gamma}^Q$ dell'hazard rate medio su 2 anni.

2.
Siano $\{S_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2$, i prezzi di due azioni descritti dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1) \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1), \quad S_0^2 > 0.$$

con μ_i, $i = 1, 2$ e $\sigma_{11} > 0$, $\sigma_{21} > 0$ costanti, $\{W_t^1\}_{t \geq 0}$ moto browniano.
(i) Considerare un mercato finanziario costituito dai due titoli ed il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$. Il mercato permette opportunitá di arbitraggio? Per quali valori di μ_i, $i = 1, 2$ e $\sigma_{11} > 0$, $\sigma_{21} > 0$ non esistono opportunitá di arbitraggio?
(ii) Considerare un mercato finanziario costituito dal primo titolo S^1, il bond con tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$ ed il titolo rischioso

$$dS_t^3 = S_t^3(\mu_3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\{W_t^2\}_{t \geq 0}$ moto browniano indipendente da $\{W_t^1\}_{t \geq 0}$.
(i) Dare la definizione di misura martingala equivalente e di mercato completo;
(ii) Determinare le misure martingala equivalenti. Il mercato é libero da arbitraggi? é completo o incompleto? (giustificare le risposte)

3. Siano $\{S_t^1\}_{t \geq 0}$ e $\{S_t^2\}_{t \geq 0}$ i prezzi di due azioni descritti rispetto alla misura neutrale al rischio P dalle seguenti equazioni differenziali stocastiche:

$$dS_t^1 = S_t^1(r dt + \sigma_1 dW_t^1), \quad S_0^1 > 0.$$

$$dS_t^2 = S_t^2(r dt + \sigma_2 dW_t^2), \quad S_0^2 > 0.$$

con $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$ costanti e $\{W_t^i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2$, moti browniani correlati con coefficiente di correlazione $\rho \in (-1, 1)$.
(i) Calcolare

$$v(t, x_1, x_2) = e^{-r(T-t)} E\left[\frac{S_T^1}{S_T^2} | S_t^1 = x_1, S_t^2 = x_2\right]$$

(**Suggerimento:** scrivere $W_t^2 = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} B_t$ con $\{B_t\}_{t \geq 0}$ moto browniano indipendente da $\{W_t^1\}_{t \geq 0}$).

(ii) Un investitore ha venduto 1000 derivati europei di payoff finale $F(S_T^1 S_T^2) = \frac{S_T^1}{S_T^2}$, determinare il delta del portafoglio di copertura investendo nelle azioni S^1 e S^2. Quante azioni S^1 ed S^2 deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio, se $S_0^1 = 30\$$, $S_0^2 = 20\$$, $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 15\%$, $T = 12$ mesi, $\rho = 0.7$, $r = 1\%$?