Scritto del 10/01/19

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (7 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$ e $q = Q(\tau \leq T) \in (0, 1)$ con T scadenza fissata.

a) Determinare il prezzo $p_1(0, T)$, di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury pari al $1 - \delta$, di valore nominale x euro e maturitá T.

b) Sia $p_1(0, T) = 64$ euro, $x = 100$ euro, $\delta = 40\%$,maturitá $T = 3$ anni e $q = 0,8$, determinare il tasso di interesse privo di rischio r.

c) Utilizzando il punto b), calcolare il prezzo al tempo $t = 6$ mesi un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery pari al 20%, valore nominale 100 euro e maturitá $T = 3$ anni. (Suggerimento: dal valore di q calcolare l'intesitá di default dell'istituzione finanziaria λ).

2. (10 punti)

Il prezzo di un'azione é di 40\$ e la volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 3%. Costruire l'albero binomiale a due stadi con $T = 12$ mesi (suggerimento si utilizzi $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ con $\Delta t = 6$ mesi)

a) Qual' é il valore di un derivato di payoff finale $log^2(S_T) + S_0 I_{\{S_T > S_0\}}$ e scadenza 12 mesi?

b) Un investitore ha venduto 1000 derivati. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare che tale strategia replica il derivato).

3. (11 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 5% e una volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 3% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale $F(S_T) = F_1(S_T) + F_2(S_T)$ ove $F_1(S_T) = log^2(S_T)$ e $F_2(S_T) = S_0 I_{\{S_T > S_0\}}$, dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 40\$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:

a) il prezzo v_0 del derivato oggi;

b) il prezzo del derivato di payoff finale $F_1(S_T)$, $v_1(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;

c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati di payoff finale $F_1(S_T)$, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(5 punti) Il prezzo di un indice azionario é di 30\$ e il suo dividend yield del 3% annuo. Il tasso d'interesse privo di rischio é del 2% annuo.

a) Qual' é il prezzo future teorico a 9 mesi dell'indice?

b) Dopo 4 mesi il prezzo dell'indice é salito a 32\$. Qual'é in quel momento il valore unitario del contratto future per la posizione lunga.

Titoli Derivati e Gestione del rischio I

Scritto del 10/01/19 Prof.ssa C. Ceci

1) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall\, t > 0$

$q = Q(\tau \le T) = 1 - e^{-\lambda T}$

a) Per la valutazione neutrale al rischio:

$$P_1(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{(\tau > T)} + x(1-\delta)\, \mathbb{1}_{(\tau \le T)} \right] =$$

$$= x\, e^{-rT} \{ Q(\tau > T) + (1-\delta) Q(\tau \le T) \} \qquad Q(\tau > T) = 1 - Q(\tau \le T) = 1 - q$$

$$= x\, e^{-rT} \{ 1 - q + (1-\delta) q \} = x\, e^{-rT} \{ 1 - \delta q \}$$

in modo equivalente $\quad Q(\tau > T) = e^{-\lambda T} \quad Q(\tau \le T) = 1 - e^{-\lambda T} = q$

$$P_1(0,T) = x\, e^{-rT} \{ 1 - \delta + \delta e^{-\lambda T} \}$$

b) $P_1(0,T) = 64€ \quad x = 100€ \quad \delta = 40\% \quad 1-\delta = 60\%$ recovery $\quad T = 3$ anni $\quad q = 0.8$

$$64 = 100\, e^{-3r} \{ 1 - 0.4 \cdot 0.8 \} = 100\, e^{-3r} \cdot 0.68 \qquad e^{-3r} = \frac{64}{68}$$

$$-3r = \log\left(\frac{64}{68}\right) \qquad r = -\frac{1}{3} \log\left(\frac{64}{68}\right) = 0.02 \qquad r = 2\%$$

c) Determiniamo λ:

$$1 - e^{-3\lambda} = 0.8 \qquad e^{-3\lambda} = 0.2 \qquad -3\lambda = \log 0.2 \qquad \lambda = -\frac{1}{3} \log 0.2$$

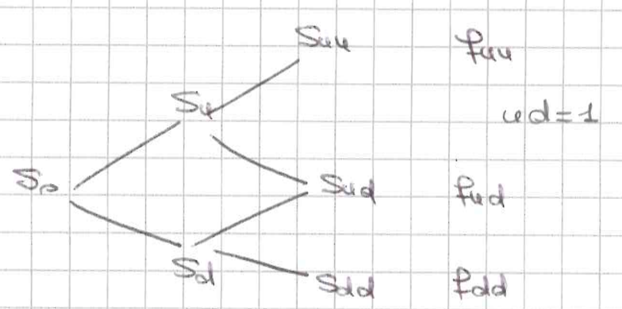
$1 - \delta = 20\% \Rightarrow \delta = 80\%$ $\qquad \lambda = 53.65\%$

$$P_1(t,T) = 100\, e^{-r(T-t)} \{ 0.2 + 0.8\, e^{-\lambda(T-t)} \} \qquad T - t = 3 - 0.5 = 2.5 \text{ anni}$$

$$P_1(t,T) = 100\, e^{-0.02 \cdot 2.5} \{ 0.2 + \underbrace{0.8\, e^{-0.5365 \cdot 2.5}}_{0.4092} \} = 38.93\, €$$

2) $S_0 = 40\$$ $\quad \sigma = 30\%$ $\quad r = 3\%$ $\quad T = 12$ mesi $= 1$ anno $\quad \Delta t = 6$ mesi $= 0.5$ anni

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.3\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1.2363$ $\quad d = 0.80886$ $\quad ud = 1$



$S_u = uS_0 = 49.452$
$S_d = dS_0 = 32.3544$

$S_{uu} = uS_u = 61.1375$
$S_{ud} = dS_u = 39.9997 = 40$
$S_{dd} = dS_d = 26.172$

$F(S_T) = (\log S_T)^2 + 40\, \mathbb{1}_{\{S_T > 40\}}$

$f_{uu} = F(S_{uu}) = (\log S_{uu})^2 + 40 = 56.9178\ \$$ $\quad (16.9178)$

$f_{ud} = F(S_{ud}) = 13.608\ \$$

$f_{dd} = F(S_{dd}) = 10.6577\ \$$

a)

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.03\cdot\frac{1}{2}} - d}{u - d} = 0.48253 \qquad 1 - p = 0.51747$$

$e^{-r\Delta t} = 0.98511$

$e^{r\Delta t} = 1.01511$

Procedo a ritroso sull'albero:

$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}p + f_{ud}(1-p)\} = 33.99247\ \$$ $\qquad f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{ud}p + f_{dd}(1-p)\} = 11.9014\ \$$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u p + f_d(1-p)\} = 22.225\ \$$

b)

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 1.29206$$

Deve acquistare 1'292,06 azioni, in prestito ha: $1'292.06\, S_0 - 1000\, f_0 = 29'477.22\ \$$

Dopo 6 mesi

$$\Delta_1 = \begin{cases} \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 2.0489 & \text{se } S_1 = S_u \text{ deve acquistare anche } 2'048.9 - 1'292.06 = 756.896 \text{ azioni} \\[2ex] \dfrac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = 0.213326 & \text{se } S_1 = S_d \text{ vende } 1'292.06 - 213.326 = 1'078.73 \text{ azioni} \end{cases}$$

In caso di rialzo in prestito nel portafoglio ha:

$$29'477.32\, e^{r\Delta t} + 756.99 \cdot S_u = 67'352.72\ \$$$

In caso di ribasso in prestito nel portafoglio ha:

$$29'477.32\, e^{r\Delta t} - 1'078.73\, S_d = -4'979.06$$

Al tempo T = 1 anno vende le azioni e restituisce il prestito se $S_1 = S_u$

$$2'048.9\, S_T - 67352.72\, e^{r\Delta t} = \begin{cases} 56'895 \sim 1'000\, f_{uu} & \text{se } S_T = S_{uu} \\ 13'549.6 \simeq 1'000\, f_{ud} & \text{se } S_T = S_{ud} \end{cases}$$

Al tempo T = 1 anno vende le azioni e restituisce il prestito se $S_1 = S_d$

$$4'979.06\, e^{r\Delta t} + 213.326 \cdot S_T = \begin{cases} 13'587.3 \simeq 1'000\, f_{ud} & \text{se } S_T = S_{ud} \\ 10'637.03 \simeq 1'000\, f_{dd} & \text{se } S_T = S_{dd} \end{cases}$$

3.) $r = 3\%$ $\sigma = 30\%$ $T = 12$ mesi $S_0 = 40\$$

$$F(S_T) = \lg^2 S_T + S_0 \mathbb{1}_{\{S_T > S_0\}}$$

a) $$v_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q}[F(S_T)] \qquad S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{Q}}$$

$\{W_t^Q\}$ moto browniano rispetto a Q

$$v_0 = e^{-rT}\left\{ \mathbb{E}^Q\left[\lg^2\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q}\right)\right] + S_0\, Q(S_T > S_0)\right\}$$

$$= e^{-rT}\left\{ \mathbb{E}^Q\left[\left(\lg S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^Q\right)^2\right] + S_0\, Q\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q} > S_0\right)\right\}$$

$$= e^{-rT}\left\{\left(\lg S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2 + \mathbb{E}^Q\left[2\left(\lg S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\sigma W_T^Q\right] + \mathbb{E}^Q\left[\sigma^2 (W_T^Q)^2\right]\right\} + S_0 e^{-rT} Q\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^Q > 0\right)$$

$$W_T^Q \sim \mathcal{N}(0,T) \Rightarrow \mathbb{E}^Q(W_T^Q) = 0 \qquad \mathbb{E}^Q((W_T^Q)^2) = T$$

$$Q\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^Q > 0\right) = Q\left(\sigma\sqrt{T}\, N > -\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) = Q\left(N > -\frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = Q\left(N < \frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T}}{\sigma}\right)$$

$$= Q(N < -0{,}05) = 0.48$$

$$v_0 = e^{-rT}\left\{\underbrace{\left[\lg S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]^2}_{\lg^2 S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 T^2 + 2\lg S_0\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} + \sigma^2 T\right\} + S_0 e^{-rT}\, \Phi\left(\frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T}}{\sigma}\right) =$$

$$= e^{-0.03}\left\{\left(\lg 40 + 0.03 - \frac{0.3^2}{2}\right)^2 + 0.3^2\right\} + 40\, e^{-0.03} \cdot 0.48$$

$$= 13.1858 + 18.6325 = 31.8183\,\$$$

b) $v_1(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\lg S_T)^2 \mid S_t = x \right] =$

$S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$

procedendo in modo analogo al punto a)

$$= e^{-r(T-t)} \left\{ \left[\lg x + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-t) \right]^2 + \sigma^2 (T-t) \right\}$$

c) $\delta(t,x) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 2\, e^{-r(T-t)} \left(\lg x + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-t) \right) \cdot \dfrac{1}{x}$

$$\delta(0,S_0) = \frac{2}{S_0} e^{-0.03} \left(\lg S_0 + (r - \tfrac{\sigma^2}{2}) T \right) = 0.178$$

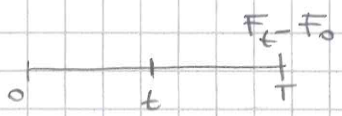
l'istituzione finanziaria deve acquistare 178 azioni

4) $S_0 = 30\$$ $\quad q = 3\%$ $\quad r = 2\%$

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} = 30\, e^{(0.02 - 0.03)\cdot 9/12} = 29.7758\$$$

$S_t = 32\$$ $\qquad F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)} = 32\, e^{(0.02-0.03)\cdot 5/12} = 31.867\$$

$T - t = 5$ mesi



Valore del contratto per la posizione lunga

$$f_t = e^{-r(T-t)} \{ F_t - F_0 \} =$$

$$= e^{-0.02 \cdot 5/12} \{ F_t - F_0 \} = 2.074\$$$

Scritto del 31/01/19

Corso di Titoli derivati e Gestione del ischio I, a.a. 2018/19

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (8 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

a) Determinare il prezzo $p(0,T)$ di un DZCB (senza recovery) di valore nominale x e maturitá T.

b) Calcolare $Q(\tau < T | \tau > t)$ con $t \in (0,T)$.

c) Applicare in punto b) per determinare il prezzo $p(t,T)$ all'istante $t \in (0,T]$.

d) Sia $T = 2$ anni, $x = 100$ e $r = 2\%$. Se il prezzo al tempo $t = 6$ mesi é pari a 95$ determinare l'intensitá di default $\lambda > 0$ dell'istituto finanziario.

2. (12 punti)

Il prezzo di un'azione é di 22$. Ci si attende che in ciascuno dei tre prossimi bimestri il prezzo salga dell' $1,8\%$ o scenda del 2%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é dell' 3%.

a) Qual'é il valore di una call europea con prezzo d'esercizio 22$ e scadenza 6 mesi?

b) Qual'é il valore della corrispondente put europea?

c) Un investitore ha venduto 1000 call. Quale strategia di copertura deve mettere in atto in caso di ribasso sia alla fine del primo bimestre che del secondo? (Verificare la copertura)

3. (9 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) dell' 8% e una volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 5% annuo. Sia S_t il prezzo descritto nel modello Black & Scholes e $S_0 = 50\$$.

a) Sia η il rendimento annuo composto continuamente dell'investimento in azioni in due anni ($S_T = S_0 e^{\eta T}$, ove S_T é il prezzo dell'azione al tempo T). Determinare la probabilitá che η abbia valori in $(3\%, 4\%)$.

b) Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 2$ anni, che pagherá alla scadenza $f(S_T) = f_1(S_T) + f_2(S_T)$ ove $f_1(S_T) = 10 I_{\{\eta < 0,035\}}$ e $f_2(S_T) = (S_T)^{-1}$. Utilizzare la valutazione neutrale verso il rischio per calcolare il prezzo del derivato oggi.

4. (4 punti)

Sia p il prezzo di una put di maturitá T e prezzo d'esercizio K, su un titolo che paga dividendi. Sia S_0 il prezzo oggi del titolo e D il valore attuale dei dividendi che verranno distribuiti durante la vita della put. Dimostrare la seguente relazione:

$$p \geq D + K e^{-rT} - S_0$$

ES. A.A. 2018/19

1) $P(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall\, t > 0$

a) secondo la valutazione neutrale al rischio

$$p(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}] = e^{-rT} x\, Q(\tau > T) = e^{-rT} x\, e^{-\lambda T} = x\, e^{-(\lambda + r)T}$$

b) $$Q(\tau < T \mid \tau > t) = \frac{Q((\tau < T) \cap (\tau > t))}{Q(\tau > t)} = \frac{Q(t < \tau < T)}{Q(\tau > t)}$$

$\tau \sim \exp(\lambda) \qquad F(t) = Q(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

e $\quad Q(t < \tau < T) = F(T) - F(t) = (1 - e^{-\lambda T}) - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}$

$$\Rightarrow Q(\tau < T \mid \tau > t) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda(T-t)}$$

c) Se $\tau > t$ (ossia non c'è stato ~~il~~ default in $(0,t]$)

$\cancel{p(t,T)} =$

$$p(t,T) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{Q}[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \mid \tau > t] =$$

$$= x\, e^{-r(T-t)}\, Q(\tau > T \mid \tau > t)$$

Dal punto b) ricaviamo che: $\quad Q(\tau > T \mid \tau > t) = 1 - Q(\tau < T \mid \tau > t) = e^{-\lambda(T-t)}$

$$\Rightarrow p(t,T) = x\, e^{-(r+\lambda)(T-t)}$$

d) $\quad 95 = x\, e^{-(r+\lambda)(T-t)} \qquad \frac{95}{x} = e^{-(r+\lambda)(T-t)} \qquad \bullet\ (r+\lambda) = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{95}{100}\right)$

$T - t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\lambda = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{95}{100}\right) - r = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{100}{95}\right) - 0.02 = 0.01$

1

Titoli Derivati e Gestione del Rischio — scritto del 31/01/19 — Prof.ssa C. Ceci

ESERCIZIO AA 2017/18

1) $r = 1{,}9\%$ $\quad r_f = 1.7\%$ $\quad S_0 = 1.19\$$ tasso di cambio spot euro/dollaro

Prezzo teorico future: $F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T} = 1.19\, e^{(0.019-0.017)\cdot 9/12} = 1.19\, e^{0.0015}$

$= 1.19179\ \$$

$F_0 = 1.20 > S_0 e^{(r-r_f)T} = 1.19179\ \$$ si apre la seguente opportunità d'arbitraggio

1) acquistiamo euro sul mercato spot: prestito di $1.19\$$ al tasso r per acquistare $1€$ che si investe per 9 mesi al tasso r_f

2) si vendono $1 e^{r_f T}$ € sul mercato futures al prezzo F_0

Dopo 9 mesi: $F_0 e^{r_f T} - S_0 e^{rT} = 1.20\, e^{0.017\cdot 9/12} - 1{,}19\, e^{0.019\cdot 9/12}$

si vendono $e^{r_f T}$ € al prezzo F_0 — si restituisce il prestito

$= 1.2154 - 1.20708 = 0.00832\ \$$

Gli esercizi 2) - 3) e 4) sono gli stessi sia per l'AA 2017/18 che 2018/19

2) $S_0 = 22\$$ $\quad$ 3 bimestri $\quad$ sale 1.8% $\quad$ scende 2%. $\quad r = 3\%$

Call europea $K = 23\$$ $\quad T = 6$ mesi $\quad f(S_T) = (S_T - 23)_+$

$S_u = S_0 + 0{,}018\, S_0 = 1.018 \cdot S_0 = 22.396\$$ $\qquad S_{uu} = S_u \cdot u = 22.799128\ \$$ $\qquad u = 1.018$

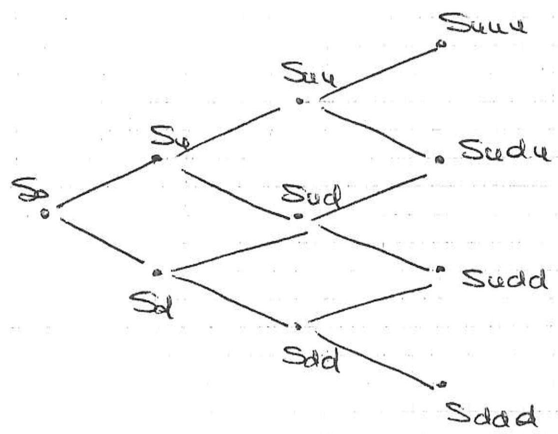
$S_d = S_0 - 0.02\, S_0 = 0.98 \cdot S_0 = 21.56\ \$$ $\qquad S_{ud} = S_u \cdot d = 21.94808\ \$$ $\qquad d = 0.98$

$S_{dd} = S_d \cdot d = 21.1288\ \$$

$S_{uuu} = S_{uu} \cdot u = 23.209512304\$$, $S_{ddd} = S_{dd} \cdot d = 20.706224\$$

$S_{uud} = S_{uu} \cdot d = 22.34314544\$$

$S_{ddu} = S_{dd} \cdot u = 21.5091184\ \$$



$f_{uuu} = (S_{uuu} - 22)_+ = 1.209512304\,\$$

$f_{udu} = (S_{udu} - 22)_+ = 0.34314544\,\$$

$f_{udd} = (S_{ddu} - 22)_+ = 0$

$f_{ddd} = (S_{ddd} - 22)_+ = 0$

1.0050195

Misura neutrale al rischio: $\Delta t = 2/12 = 1/6$ anni

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.03 \times 1/6} - 0.98}{1.018 - 0.98} = 0.6582242 \qquad 1-p = 0.3417758 \qquad e^{-r\Delta t} = 0.9950125$$

Procediamo a ritroso sull'albero: $f_{uu} = e^{-r\Delta t}\, \mathbb{E}^*[\,f(S_T) \mid S_{2\Delta t} = S_{uu}]$

$f_{uu} = e^{-r\Delta t}\{ f_{uuu}\, p + f_{uud}(1-p)\} = 0.9088534\,\$$

$f_{ud} = e^{-r\Delta t}\{ f_{udu}\, p + f_{udd}(1-p)\} = 0.2247401\,\$$

$f_{dd} = 0$ $\qquad f_u = e^{-r\Delta t}\{ f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p)\} = 0.67167327\,\$$

$\qquad f_d = e^{-r\Delta t}\{ f_{du}\, p + f_{dd}(1-p)\} = 0.1471916\,\$$

$$\boxed{f_0 = e^{-r\Delta t}\{ f_u\, p + f_d(1-p)\} = 0.48996219}\,\$$$

b) Parità put-call $\qquad p_0 + S_0 = c_0 + K e^{-rT} \Rightarrow p_0 = c_0 + K e^{-rT} - S_0$

$p_0 = 0.48996219 + 22\, e^{-0.03 \times 5/12} - 22 = 0.162424861\,\$$

e) Investitore vende 1000 calls.

Portafoglio autofinanziante di copertura $\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1), (\Delta_2, B_2)\}$

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = \frac{0.52448767}{0.836} = 0.627370418$$

al tempo $t = 0$ acquista 627.370418 azioni, in prestito nel portafoglio B_0

$$1000 \times \Delta_0 S_0 - 1000 \times f_0 = 13312.18702 \$$$

al tempo $t = 2$ mesi se $S_1 = S_d$

$$\Delta_{1,d} = \frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = \frac{0.22471401}{0.81928} = 0.274314153$$

Vende $627.370418 - 274.314153 = 353.056264$ azioni

in prestito nel portafoglio B_1 $13312.18702 \times e^{r\Delta t} - 353.056264 \times S_d = 5767.021303 \$$

al tempo $t = 4$ mesi se $S_2 = S_{dd}$

$$\Delta_{2,dd} = \frac{f_{ddu} - f_{ddd}}{S_{ddu} - S_{ddd}} = 0$$

Vende anche 274.314153 azioni

in prestito nel portafoglio B_2 $5767.021303 \cdot e^{r\Delta t} - 274.314153 \times S_{dd} \cong 0$

~~[illegible]~~ B_0 copertura è già stata verificata in quanto $\Delta_{2,dd} = 0$ e $B_{2,dd} = 0$
e sia in caso di ulteriore ribasso o rialzo non deve pagare nulla.

3) $\mu = 8\%$ $\sigma = 30\%$ $r = 5\%$

$$S_t = S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \omega_t}$$ $\{\omega_t\}$ moto browniano

a) $\omega_t \sim \mathcal{N}(0, t) \Rightarrow (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\omega_t \sim \mathcal{N}\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t \right)$

Rendimento dell'azione ~~[illegible]~~ nel periodo $[0,T]$:

$$S_T = S_0 e^{\eta T} \Rightarrow \eta = \frac{1}{T}\left\{ (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\omega_T \right\} \sim \mathcal{N}\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2}), \frac{\sigma^2}{T} \right)$$

$T = 2$ anno $\eta \sim \mathcal{N}\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2}), \frac{\sigma^2}{2} \right)$ $\eta \sim (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} N$ dove $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mu - \frac{\sigma^2}{2} = 0.08 - \frac{0.3^2}{2} = 0.035$ $\eta \sim 0.035 + \frac{0.3}{\sqrt{2}} N$

$P(a < \eta < b) = P\left(a < 0.035 + \frac{0.3}{\sqrt{2}}N < b\right) = P\left(\frac{(a - 0.035)\sqrt{2}}{0.3} < N < \frac{(b - 0.035)\sqrt{2}}{0.3}\right)$ $a = 0.03$ $b = 0.04$

$= P(-0.024 < N < 0.024) = \Phi(0.024) - \Phi(-0.024) = 2\Phi(0.024) - 1 = 0.02$

$\Phi(0.024) \simeq 0.51$

b) $f_1(S_T) = 10\, \mathbb{1}_{\{\eta < 0.035\}}$

$f_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[f_1(S_T)] = e^{-rT}\, 10\, Q(\eta < 0.035)$ $\omega_T^{Q} \sim \mathcal{N}(0, T)$

rispetto a Q $S_T = S_0^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\omega_T^{Q}} = S_0 e^{\eta T} \Rightarrow \eta = \frac{1}{T}\left\{ (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\omega_T^{Q} \right\}$

$\omega_T^{Q} \sim \sqrt{T}\, N$

$Q(\eta < 0.035) = Q\left((r - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma\sqrt{T}\, N < 0.035 \right) =$ $\eta \sim (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} N$

$= Q\left(N < \frac{0.035 - (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}} \right) = Q\left(N < \left(\frac{0.035 - (0.05 - \frac{0.3^2}{2})}{0.3} \right)\sqrt{2} \right) = Q(N < 0.14) = 0.5557$

$$f_1 = 10\, e^{-0.05\cdot 2}\, \Phi(0.14) = 1.8$$

$$f_2(S_T) = S_T^{-1} \qquad f_2 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T^{-1} \right] = e^{-rT}\, S_0^{-1}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})T - \sigma W_T^{\mathbb{Q}}} \right]$$

$$= \frac{e^{-rT}}{S_0}\, e^{-rT}\, e^{\frac{\sigma^2}{2}T}\, \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma\sqrt{T}N} \right]}_{= e^{\frac{\sigma^2 T}{2}}} = \frac{1}{S_0}\, e^{-2rT}\, e^{\sigma^2 T}$$

$$f_0 = \underbrace{10\, e^{-0.05\cdot 2}\, \Phi(0.14)}_{1.8} + \underbrace{\frac{1}{50}\, e^{-2\cdot 0.05\cdot 2}\, e^{0.3^2\cdot 2}}_{0.0196} = 1.82\,\$$$

c) $v_2(t,x) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T^{-1} \mid S_t = x \right]$

$$S_T = S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T-t}\, N$

procedendo in modo analogo

$$v_2(t,x) = \frac{1}{x}\, e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)}$$

d) $\delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\, e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)}$

$e^{-0.015}$

$$\delta(t,S_t) = -\frac{1}{(39)^2}\, e^{(-2\cdot 0.05 + 0.3^2)\frac{3}{2}} = -0.0006477$$

$T - t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Se l'investitore ha venduto 10'000 derivati

deve avere allo scoperto al tempo t 6.48 azioni

5

Scritto del 14/02/19

Corso di Titoli derivati e Gestione del Rischio I, a.a. 2018/19

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (5 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale. Sia $r = 2\%$ il tasso d'interesse composto continuamente. Sia $T = 9$ mesi e la probabilitá di default in $[0, T]$ pari a $Q(\tau \leq T) = 0,1$.
a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ di un DZCB di valore nominale 100 euro e maturitá T emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury pari al 30%.
b) Determinare l'intensitá di default dell'istituzione finanziaria.

2. (13 punti)
Il prezzo di un'azione é di 35\$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi bimestri il prezzo salga del 5% o scenda del 4%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 3%.
a) Qual é il valore di una put europea con prezzo d'esercizio 37\$ e scadenza 4 mesi?
b) Qual é il valore della corrispondente put americana?
c) Un investitore ha venduto 1000 put. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare la copertura).

3. (12 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 7% e una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 2% annuo. Sia S_t il prezzo descritto nel modello Black & Scholes e $S_0 = 40\$$. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 9$ mesi, che pagherá alla scadenza $f(S_T) = (S_T - S_0)^2$.
a) Utilizzare la valutazione neutrale verso il rischio per calcolare il prezzo del derivato oggi.
a) Utilizzare la valutazione neutrale verso il rischio per calcolare il prezzo $v(t, x)$ del derivato al tempo t se $S_t = x$.
b) Verificare che $v(t, x)$ soddisfa l'equazione di valutazione.

4. (4 punti)
Una compagnia aerea deve acquistare 50.000 litri di carburante (jet fuel) tra 9 mesi. Il prezzo oggi é di $1,30\$$ al litro. Per coprirsi dal rischio di un eventuale aumento del prezzo effettua una copertura su futures a 9 mesi sul combustibile da riscaldamento (heating oil). La deviazione standard dei prezzi del carburante é di $0,60\%$, quella dell'olio da riscaldamento di $0,70\%$ e il coefficiente di correlazione é pari a $0,85$. Spiegare in cosa consiste la copertura mediante futures e calcolare la dimensione ottimale della posizione su futures.

Scritto del 13/06/19

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (7 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente. Il valore di mercato al $t = 6$ mesi di un free-defaultable ZCB di maturitá $T = 12$ mesi e valore nominale 100 euro é pari a 98 euro.

a) Sia il prezzo $p(t, T)$ al $t = 6$ mesi di un DZCB di maturitá $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro é pari a 88 euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.

b) Determinare il prezzo $p_{RT}(t, T)$ con $t = 6$ mesi e $T = 12$ mesi di un DZCB di valore nominale 100 euro e recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 0,75$.

c) Sia il prezzo al $t = 6$ mesi di un DZCB (senza recovery) emesso da un'altra istituzione finanziaria di maturitá $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro pari a 80 euro. Determinare lo spread tra le due istituzioni.

2. (10 punti)

Il prezzo di un'azione é di 18$. Ci si attende che in ciascuno dei tre prossimi trimestri il prezzo salga del 2% o scenda del 2%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 2%.

a) Qual' é il valore di una put europea con prezzo d'esercizio 18$ e maturitá 9 mesi?

b) Un investitore ha venduto 1000 put. Quale strategia di copertura deve mettere in atto in caso di ribasso alla fine del primo trimestre e rialzo alla fine del secondo trimestre? (Verificare che tale strategia replica il derivato).

3. (11 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 6% e una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale $F(S_T) = F_1(S_T) + F_2(S_T)$ ove $F_1(S_T) = \frac{S_T^2}{100}$ e $F_2(S_T) = log(S_T)$, dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 60$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:

a) il prezzo v_0 del derivato oggi;

b) il prezzo del derivato $v(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;

c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(5 punti)

Scrivere e dimostrare la put-call parity relativa ad opzioni europee scritte su titoli che non pagano dividendi.

Scritto del 4/07/19

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (8 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente annuo.
a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T.

Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 95$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con recovery of treasury del 60% pari a $p_{RT} = 90$ euro.
b) Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
c) Determinare il prezzo $\bar{p}_{RT}$ di un DZCB con recovery of treasury dell' 80% e maturitá $T = 3$ anni e valore nominale 100 euro.

2. (11 punti)
Il prezzo di un'azione é di 32\$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi quadrimestri il prezzo salga dell' 1.8% o scenda del 2.3%. Il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente é del 4%.
a) Qual'é il valore di una call europea con prezzo d'esercizio 31\$ e scadenza 8 mesi?
b) Qual'é il valore di una put europea con lo stesso prezzo d'esercizio e la stessa scadenza?
c) Un investitore ha venduto 100 call. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare la copertura)

3. (9 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 5% e una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 2$ anni di payoff finale $F(S_T) = \sqrt{S_T}$, dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 30\$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
a) il prezzo v_0 del derivato oggi;
b) il prezzo del derivato $v(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;
c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(5 punti)
Determinare e disegnare il grafico del payoff finale, in funzione del prezzo dell'azione al tempo T, di uno spread a farfalla ottenuto acquistando 2 calls con prezzo d'esercizio $k_1 = 20\$$ e $k_3 = 25\$$ e maturitá T e vendendo 2 calls con prezzo d'esercizio $k_2 = 22.5\$$ e stessa maturitá. I prezzi delle calls sono $c_1 = 4\$$, $c_2 = 2\$$ e $c_3 = 0.5\$$. Per quali valori di S_T il payoff é positivo?

Prof. C. Cea

1

$Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0 \qquad Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$

(i) $P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} \right] =$

$= x e^{-rT} \{ Q(\tau > T) + (1-\delta) Q(\tau \le T) \} =$

$= x e^{-rT} \{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T}) \} = \boxed{x e^{-rT} \{ 1-\delta + \delta e^{-\lambda T} \}}$

(ii) $x = 100 \quad T = 2$ anni $\quad 1-\delta = 0.6$ (recovery)

$P_0 = 100\, e^{-rT} = 95€ \qquad P_{RT} = 100\, e^{-rT} \{ 0.6 + 0.4\, e^{-\lambda T} \} = 90€$

$P_{RT} = P_0 \{ 0.6 + 0.4\, e^{-\lambda T} \} \qquad \frac{P_{RT}}{P_0} = 0.6 + 0.4\, e^{-\lambda T} \qquad e^{-\lambda T} = \left(\frac{P_{RT}}{P_0} - 0.6 \right) \frac{1}{0.4}$

$\lambda T = -\ln \left\{ \frac{P_{RT}}{P_0 \cdot 0.4} - \frac{0.6}{0.4} \right\} \qquad \lambda = -\frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{90}{95 \cdot 0.4} - \frac{0.6}{0.4} \right\} = 0.07$

(iii) $\bar{P}_{RT} = x e^{-rT} \{ 1-\delta + \delta e^{-\lambda T} \} \qquad x = 100 \quad 1-\delta = 0.8 \quad \delta = 0.2$

$\lambda = 0.07 \quad T = 3$ anni

Determiniamo r: $\quad P_0 = 100\, e^{-2r} = 95 \qquad e^{-2r} = \frac{95}{100} \qquad -2r = \ln\left(\frac{95}{100}\right) \qquad r = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{95}{100}\right) = 0.026$

$\bar{P}_{RT} = 100\, e^{-0.026 \cdot 3} \{ 0.8 + 0.2\, e^{-0.07 \cdot 3} \} = 100\, e^{-0.026 \cdot 3}\, 0.9621 = 88.99€$

2) $S_0 = 32\,\$$ sale 1.8% scende 2.3% 2 quadrimestri $r = 4\%$ $T = 8$ mesi

call $K = 31\,\$$ $(S_T - 31)_+$ payoff

$S_u = S_0 + 0.018\, S_0 = 1.018\, S_0 = 32.576\,\$$

$S_d = S_0 - 0.018\, S_0 = 0.977\, S_0 = 31.264\,\$$

$S_{uu} = u\, S_u = 33.1623 83\,\$$ $f_{uu} = (S_{uu} - 31)_+ = 2.16$

$S_{ud} = d\, S_u = 31.826756\,\$$ $f_{ud} = (S_{ud} - 31)_+ = 0.82$

$S_{dd} = d\, S_d = 30.544328\,\$$ $f_{dd} = (S_{dd} - 31)_+ = 0$

$u = 1.018$
$d = 0.977$

S_{uu} $f_{uu} = 2.162368$

S_u

S_0 S_{ud} $f_{ud} = 0.826756$

S_d

S_{dd} $f_{dd} = 0$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.04 \cdot 4/12} - 0.977}{1.018 - 0.977} = 0.88835$$

$e^{r\Delta t} = 1.01342261$ $e^{-r\Delta t} = 0.98675516$

$1 - p = 0.11164344 9$

Procediamo a ritroso

$f_u = e^{-r\Delta t}\{ p\, f_{uu} + (1-p)\, f_{ud} \} = 1.98659042 3\,\$$

$f_d = e^{-r\Delta t}\{ p\, f_{ud} + (1-p)\, f_{dd} \} = 0.72472638 2\,\$$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{ p\, f_u + (1-p)\, f_d \} = 1.82126541 7\,\$ = C_0$

b) Relazione di parità put-call $C_0 + K e^{-rT} = P_0 + S_0$

$\Rightarrow P_0 = C_0 + 31\, e^{-0.04 \cdot 8/12} - 32 = 0.00552364 6\,\$$

2

c) Investitore ha venduto 100 calls

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 0.96178661 6$$

Al tempo t=0 acquista 96.1786616 azioni in prestito nel portafoglio ha

$$96.17866 16 \cdot S_0 - 100 f_0 = 2'895.59 \$$$

Dopo 4 mesi
$$\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_{1,u} = \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 1 & se\ S_1 = S_u \\ \Delta_{1,d} = \dfrac{f_{du} - f_{dd}}{S_{du} - S_{dd}} = 0.6449820 1 & se\ S_1 = S_d \end{cases}$$

In caso di rialzo acquista altre 100 - 96.1786616 = 3.8213384 azioni in prestito ha

$$2'895.59 e^{r\Delta t} + 3.821 \cdot S_u = 3'058.94 \$$$

In caso di ribasso vende 96.1786616 - 64.498201 = 31.68046 azioni in prestito ha

$$2'895.59 e^{r\Delta t} - 31.68 \cdot S_d = 1'943.999 \$$$

Verifichiamo la correttezza

Al tempo T vende le azioni e restituisce il denaro in prestito

$$se\ S_1 = S_u \qquad 100 \cdot S_T - 3'058.94 e^{r\Delta t} = \begin{cases} 100 S_{uu} - 3'099.999 = 216.2363 = 100 f_{uu} & se\ S_T = S_{uu} \\ 100 S_{ud} - 3'099.999 = 82.6766 = 100 f_{ud} & se\ S_T = S_{ud} \end{cases}$$

$$se\ S_1 = S_d \qquad 64.4982 \cdot S_T - 1'943.999 e^{r\Delta t} = \begin{cases} 82.6766 = 100 f_{du} & se\ S_T = S_{du} \\ 0 = 100 \cdot f_{dd} & se\ S_T = S_{dd} \end{cases}$$

3) $\mu = 5\%$ $\sigma = 20\%$ $r = 2\%$ $T = 2$ anni

$F(S_T) = \sqrt{S_T}$ $S_0 = 30\$$

Valutazione neutrale al rischio: $v_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q}[F(S_T)]$ Q misura neutrale al rischio

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q}$$ $\{W_t^Q\}$ moto browniano rispetto a Q

$$v_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q}[\sqrt{S_T}] = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q}\left[\sqrt{S_0}\, e^{\frac{1}{2}(r - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{1}{2}\sigma W_T^Q}\right] = e^{-\frac{1}{2}rT} e^{-\frac{\sigma^2}{4}T} \sqrt{S_0}\, \mathbb{E}^{Q}\left[e^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}N}\right]$$

$W_T^Q \sim \sqrt{T} N$ con $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$$v_0 = \sqrt{S_0}\, e^{-\frac{r}{2}T} e^{-\frac{\sigma^2}{4}T} e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{4}T} = \sqrt{S_0}\, e^{-\frac{r}{2}T} e^{-\frac{\sigma^2}{8}T}$$

$$v_0 = \sqrt{30}\, e^{-\frac{0.02}{2}\cdot 2} e^{-\frac{0.20^2}{8}\cdot 2} = 5.32\$$$

$e^{-0.02-0.01}$

b) $v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{Q}[F(S_T) \mid S_t = x]$ ora scriviamo $S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$

dove $W_T^Q - W_t^Q \sim \sqrt{T-t}\,N$ si ottiene analogamente a sopra

$$v(t,x) = \sqrt{x}\, e^{-(\frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8})(T-t)}$$

c) $\delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-(\frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8})(T-t)}$ delta del portafoglio di copertura

$\delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{30}} e^{-(0.01 + \frac{0.2^2}{4})} = 0.0886$ deve acquistare 88.6 azioni

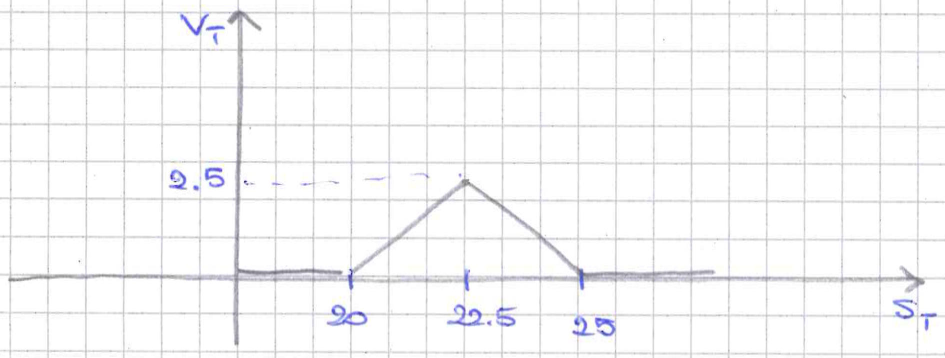
4) 2 calls lunghe $K_1 = 20\$$ $K_3 = 25\$$ $c_1 = 4\$$ $c_3 = \cancel{\ }\ 0.5\$$

2 calls corte $K_2 = 22.5\$$ $c_2 = \cancel{\ }\ 2\$$

Payoff complessivo

$$V_T = (S_T - K_1)_+ + (S_T - K_3)_+ - 2(S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0 & S_T \le K_1 \\ S_T - K_1 & K_1 < S_T \le K_2 \\ S_T - K_1 - 2(S_T - K_2) = 2K_2 - K_1 - S_T & K_2 < S_T \le K_3 \\ S_T - K_1 + S_T - K_3 - 2S_T + 2K_2 = 2K_2 - K_1 - K_3 = 0 & K_3 < S_T \end{cases}$$

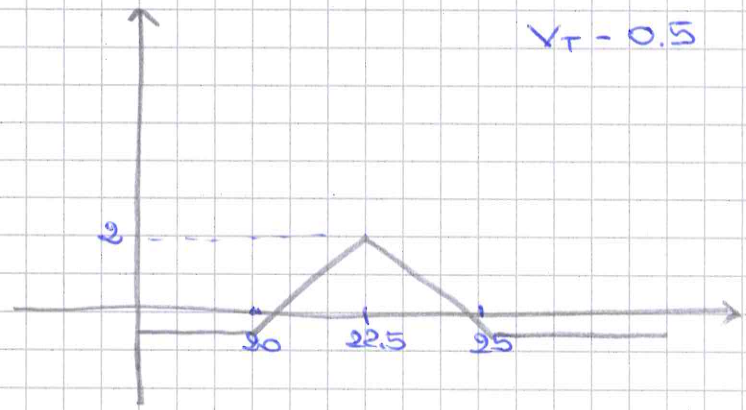
$$V_T = \begin{cases} 0 & S_T \le 20 \\ S_T - 20 & 20 < S_T \le 22.5 \\ 25 - S_T & 22.5 < S_T \le 25 \\ 0 & 25 < S_T < 0 \end{cases}$$



Tenendo conto del premio iniziale:

$c_1 + c_3 - 2c_2 = 4 + 0.5 - 4 = 0.5$

$V_T - 0.5$



Payoff positivo se $V_T - 0.5 > 0$

$$\begin{cases} S_T - 20 - 0.5 = S_T - 20.5 > 0 & S_T > 20.5 \\ 25 - S_T - 0.5 = 24.5 - S_T > 0 & S_T < 24.5 \end{cases}$$

se $20.5 < S_T < 24.5$

Scritto del 12/09/19

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (7 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria (A) di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente annuo.

a) Determinare la formula del prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T, $p_{RT}(0, T)$.

b) Qual'é il valore nel caso in cui sia $x = 100$ euro, $\lambda = 3\%$, $r = 2\%$, $\delta = 30\%$ e $T = 1$ anno?

c) Un'altra istituzione finanziaria (B) ha emesso un DZCB con zero recovery, valore nominale 100 e maturitá $T = 1$ anno. Lo spread tra l'istituzione B e la A é pari al $1,5\%$, determinare l'intensitá di default dell'istituzione B. Motivare la risposta.

2. (10 punti)

Il prezzo di un'azione é di 30$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi quadrimestri il prezzo salga del 2% o scenda del 3%. Il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente é del 2%.

a) Qual'é il valore di una derivato di payoff finale $(S_T^2 - K)_+$ (call scritta su S^2) con $K = 900\$$ e scadenza 8 mesi?

b) Un investitore ha venduto 10 derivati. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare la copertura)

3. (12 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 5% e una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 2$ anni di payoff finale $F(S_T) = F_1(S_T) + F_2(S_T)$, ove $F_1(S_T) = (\frac{S_T}{S_0})^2$ e $F_2(S_T) = S_0 I_{\{S_T < S_0\}}$, dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 30$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:

a) il prezzo v_0 del derivato oggi;

b) il prezzo del derivato $v_1(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$ di payoff finale $F_1(S_T)$.

c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati di payoff finale $F_1(S_T)$, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(4 punti)

Il prezzo di un indice azionario é di 60$ e il suo dividend yield $q = 3.5\%$ annuo. Il tasso d'interesse privo di rischio (composto continuamente) é del 2.5%.

(a) Qual'é il prezzo future dell'indice a 9 mesi?

(b) Dopo 4 mesi il prezzo dell'indice é salito a 62$. Qual'é in quel momento il valore unitario del contratto future?

(1) $\tau \sim \exp(\lambda)$ $\quad Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$

(i)

$$P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}\left[x\,\mathbb{1}_{(\tau>T)} + x(1-\delta)\,\mathbb{1}_{(\tau\le T)}\right] =$$

$$= e^{-rT} x \{ Q(\tau>T) + (1-\delta)\underbrace{Q(\tau\le T)}_{1-Q(\tau>T)} \} = x e^{-rT}\{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1-e^{-\lambda T})\}$$

$$\boxed{P_{RT}(0,T) = x e^{-rT}\{1-\delta + \delta e^{-\lambda T}\}}$$

$\lambda = 3\%$ $\quad r = 2\%$ $\quad \delta = 30\%$ $\quad x = 100€$ (ii) $P_{RT}(0,1) = 100\, e^{-0.02}\{0.70 + 0.30\, e^{-0.03}\} = 97.15€$

$T = 1$ anno

~~(ii)~~

$$\cancel{P_{FV}(0,T) = \mathbb{E}^{Q}\left[x\,\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} e^{-rT} + (1-\delta) x e^{-r\tau}\,\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}\right] = x e^{-rT} Q(\tau>T) + (1-\delta) x\, \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau}\,\mathbb{1}_{(\tau\le T)}\right]}$$

$$\cancel{\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau}\,\mathbb{1}_{(\tau\le T)}\right] = \int_0^T e^{-ru}\lambda e^{-\lambda u}\,du = \lambda\int_0^T e^{-(r+\lambda)u}\,du = -\frac{\lambda}{r+\lambda} e^{-(r+\lambda)u}\Big|_0^T = -\frac{\lambda}{r+\lambda}\{e^{-(r+\lambda)T} - 1\}}$$

$$\boxed{\cancel{P_{FV}(0,T) = x e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta)\frac{\lambda}{r+\lambda}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)}}$$

$$\cancel{P_{FV}(0,1) = 100 e^{-(0.02+0.03)} + 100 \cdot 0.70 \cdot \frac{0.03}{0.05}\left(1 - e^{-0.05}\right) = 95.12 + 2.048 = 97.17€}$$

~~(iii) $P_{FV}(0,1) > P_{RT}(0,1)$ in quanto è più conveniente per chi detiene il DZCB ricevere il recovery al tempo di default (se avviene prima dell'anno) rispetto a riceverlo alla maturità.~~

(iv) Spread tra le due istituzioni riferisce alla differenza dei loro rendimenti logaritmici

$P^{A}_{RT}(0,T) = x e^{-rT}\{1-\delta + \delta e^{-\lambda_A T}\}$ $\quad P^{B}_{RT}(0,T) = x e^{-rT}\{1-\delta + \delta e^{-\lambda_B T}\}$ $\quad \lg \frac{P^B(0,1)}{P^A(0,1)} = 0.015$

$\cancel{\frac{P^{B}_{RT}(0,T)}{P^{A}_{RT}(0,T)}} =$ $\quad$ per $\delta = 1$ $\quad P^{A}(0,1) = x e^{-(r+\lambda_A)T}$ $\quad P^{B}(0,1) = x e^{-(r+\lambda_B)T}$ $\quad$ senza recovery

$$\frac{P^B(0,1)}{P^A(0,1)} = \frac{x e^{-(r+\lambda_A)T}}{x e^{-(r+\lambda_B)T}} = e^{-(\lambda_A-\lambda_B)}$$

$$\lg\frac{P^B(0,1)}{P^A(0,1)} = \lambda_B - \lambda_A \Rightarrow \lambda_B = \lambda_A + \lg\frac{P^B(0,1)}{P^A(0,1)} = 0.03 + 0.01 = 0.045$$

a) $S_0 = 30\$$ sale 2% e scende 3% $r = 2\%$

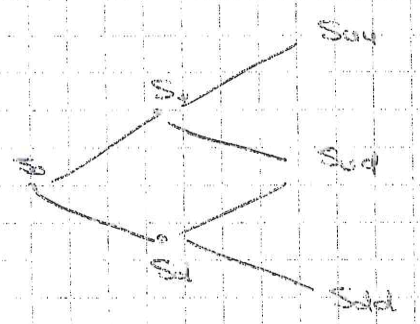
$S_u = S_0 + S_0 \cdot 0.02 = 1.02\, S_0 = 30.6\$$

$S_d = S_0 - S_0 \cdot 0.03 = 0.97\, S_0 = 29.1\$$

$S_{uu} = 31.212$ $(S_{u}^{2} - 900)_+$

$S_{ud} = 29.682$

$S_{dd} = 28.227$



$f_{uu} = 74.188944$

$f_{ud} = 0$

$f_{dd} = 0$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.02 \cdot 1/12} - 0.97}{1.02 - 0.97} = 0.733$$

$1 - p = 0.2662346$

$$f_u = e^{-r\Delta t}\left[f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p) \right] = \underset{0.998336}{e^{-0.00\bar{6}}} \cdot 74.18944 \cdot 0.733765 = 54.0759\ \$$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}\left[f_{ud}(p + f_{dd}(1-p) \right] = 0$$

$$f_0 = e^{-r\Delta t}\left[f_u\, p + f_d(1-p) \right] = e^{-0.00\bar{6}} \cdot 54.0759 \cdot 0.733765 = \underset{39.679}{39.41538\ \$}$$

39.41538 \$

b) Strategia di copertura

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 36.0506$$

Acquisto 360.506 azioni allo scoperto al tempo $t = 0$, in prestito prendo

$360.506 \cdot S_0 - 10 \cdot f_0 = 10421\ \$$

Dopo 4 mesi

$$\Delta_1 = \begin{cases} \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 48.4895 & \text{se } S_{\Delta t} = S_u \\[2ex] \dfrac{f_{du} - f_{dd}}{S_{du} - S_{dd}} = 0 & \text{se } S_{\Delta t} = S_d \end{cases}$$

In caso di rialzo:
acquista altre $484.895 - 360.506 = 124.389$ azioni, in prestito ha

$$10'421\, e^{r\Delta t} + 124.389 \cdot S_u = 14'297 \,\$$$

In caso di ribasso:
vende le ~~[illegible]~~ 360.506 azioni nel portafoglio ha

$$360'506 \cdot S_d - 10'421 \cdot e^{r\Delta t} = 0$$

$$10'490.305$$

Verifichiamo la copertura dopo 8 mesi

se $S_{\Delta t} = S_u$ vende le 487.124 azioni e restituisce il prestito

$$484.895 \cdot S_T - e^{r\Delta t} 14'297 = \begin{cases} 15'134.54 - 14'392.6 = 741.9\,\$ = 10 \cdot f_{uu} & \text{se } S_T = \\ 14'392.6 - 14'392.6 \simeq 0 = 10 \cdot f_{ud} & \text{se } S_T \end{cases}$$

se $S_{\Delta t} = S_d$ non deve far nulla.

3) $\mu = 5\%$ $\sigma = 20\%$ $r = 2\%$ $T = 2$ anni

$F(S_T) = F_1(S_T) + F_2(S_T)$ $F_1(S_T) = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^2$ $F_2(S_T) = S_0 \mathbb{1}_{\{S_T < S_0\}}$

$S_0 = 30\$$

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_T)] = e^{-rT} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{S_T}{S_0}\right)^2\right] + S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{S_T < S_0\}}] \right\}$$

$S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}}$ $\{W^{\mathbb{Q}}\}$ moto browniano

$W_T^{\mathbb{Q}} \sim N(0,T)$

$W_T^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T} N$ $N \sim N(0,1)$

$$\left(\frac{S_T}{S_0}\right)^2 = e^{2(r - \frac{\sigma^2}{2})T + 2\sigma W_T^{\mathbb{Q}}} \qquad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_T/S_0\right)^2\right] = e^{(2r - \sigma^2)T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2\sigma W_T^{\mathbb{Q}}}\right] = e^{(2r-\sigma^2)T} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2\sigma\sqrt{T} N}\right]}_{= e^{4\sigma^2 T/2}}$$

ricordiamo che $\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$ $N \sim N(0,1)$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_T/S_0\right)^2\right] = e^{(2r + \sigma^2)T}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{S_T < S_0\}}] = \mathbb{Q}(S_T < S_0) = \mathbb{Q}\left(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}} < S_0\right) = \mathbb{Q}\left((r - \tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}} < \ln 1\right)$$

$$= \mathbb{Q}\left(\sigma\sqrt{T} N < -(r - \tfrac{\sigma^2}{2})T\right) = \mathbb{Q}\left(N < -\frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \Phi\left(\frac{(\frac{\sigma^2}{2} - r)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$\Rightarrow V_0 = \underbrace{e^{-rT} e^{(2r + \sigma^2)T}}_{e^{rT} e^{\sigma^2 T}} + S_0 e^{-rT} \Phi\left(\frac{(\frac{\sigma^2}{2} - r)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$V_0 = e^{(0.02 + (0.2)^2) \cdot 2} + 30 e^{-0.02 \cdot 2} \overbrace{\Phi\left(\frac{(\frac{0.2^2}{2} - 0.02)2}{0.2 \cdot \sqrt{2}}\right)}^{\Phi(0) = 0.5} = 15.54 €$$

$+ 15 e^{-0.04}$

14.41

$$v_1(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{S_T}{S_0}\right)^2 \,\middle|\, S_t = x\right] = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{S_T}{S_t}\right)^2 \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^2 \,\middle|\, S_t = x\right] =$$

$$= e^{-r(T-t)} \left(\frac{x}{S_0}\right)^2 \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{S_T}{S_t}\right)^2\right]}_{\text{si calcola analogamente al punto precedente}} = \left(\frac{x}{S_0}\right)^2 e^{2(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}\right]$$

$$v_1(t,x) = \left(\frac{x}{S_0}\right)^2 \cdot e^{(2r+\sigma^2)(T-t)}\, e^{-r(T-t)} = \left(\frac{x}{S_0}\right)^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} = \left(\frac{x}{S_0}\right)^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

c) $$\delta(t,x) = \frac{\partial v_1}{\partial x} = 2\frac{x}{S_0^2}\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

$$\delta(0,S_0) = 2\frac{S_0}{S_0^2}\, e^{(0.02+0.2^2)\cdot 2} = \frac{2}{30}\, e^{0.12} = 0.059$$

Per coprirsi dal rischio l'istituzione finanziaria deve acquistare al tempo $t=0$ 59 azioni

4) $S_0 = 60\$$ $\quad q = 3.5\%$ $\quad r = 2.5\%$ $\quad T = 9$ mesi

a) $F_0 = S_0 e^{(r-q)T} = 60\, e^{(0.025 - 0.035)\cdot 9/12} = 59.55\$$

0 4 9

$F_t - F_0$

b) $T - t = 9 - 4 = 5$ mesi $\quad F_t = S_t\, e^{(r-q)(T-t)} =$

$= 62\, e^{(0.025 - 0.035)\cdot 5/12} = 61.74\$$

Valore della posizione lunga $\quad f_t = (F_t - F_0)\, e^{-r(T-t)} = (61.74 - 59.55)\, e^{-0.025\cdot 5/12} = 2.17\$$