FOGLIO DI ESERCIZI SUL RISCHIO DI CREDITO
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I e II, a.a. 2019/20
Prof.ssa Claudia Ceci

1. Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Determinare l'espressione del prezzo $p_1(0, T)$, di un DZCB (senza recovery) di valore nominale 100 euro e maturitá T.
(ii) Sia oggi ($t = 0$) il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro e maturitá $T = 2$ anni, pari a $p_0 = 50$ euro e quello di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria (senza recovery) di stesso valore nominale e maturitá, pari a $p_1 = 30$ euro. Determinare l'intensitá di default λ e la probabilitá di insolvenza $q = Q(\tau \leq T)$.
(iii) Utilizzando il valore di λ calcolato al punto (ii), ipotizzando che tra un anno non si sia verificato il default, determinare il prezzo al tempo $t = 1$ anno del DZCB.

2. Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r > 0$.
(i) Determinare l'espressione del prezzo $p_1(0, T)$, di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury pari al 70% di valore nominale 100 euro e maturitá T.
(ii) Sia oggi ($t = 0$) il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 3$ anni, pari a $p_0 = 50$ euro e quello di un DZCB con recovery of treasury pari al 70% di stesso valore nominale e maturitá, pari a $p_1 = 40$ euro. Determinare l'intensit di default λ e e la probabilitá' di insolvenza $q = Q(\tau \leq T)$.
(iii) Utilizzando il valore di λ calcolato al punto (ii) determinare il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB emesso dall'istituzione finanziaria con recovery pari al 50%.

3. Sia Q una misura neutrale al rischio. Sia τ il tempo di default di una determinata istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Si assuma tasso d'interesse privo di rischio $r = 3\%$ e $Q(\tau \leq T) = 0,08$, con T pari ad un anno.
(i) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ di un DZCB di valore nominale 100 emesso dall'istituzione finanziaria con recovery of treasury pari al 40% e maturitá $T = 1$ anno,
(ii) Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.

4. Calcolare il prezzo al tempo $t = 0$ di un Defaultable Coupon Bond di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, che paga una cedola fissa semestrale di 10 euro. Si assuma il tasso d'interesse privo di rischio $r = 1\%$ e intensitá di default $\lambda = 0,8\%$.

5. Calcolare il fair premium x_0^*, di un CDS con LGD della reference entity pari a $\delta = 0,5$, intensitá di default $\lambda = 1\%$, premi semestrali e maturitá 1 anno. Assumere il tasso di interesse privo di rischio $r = 1\%$.

1) Poiché τ ha distribuzione esponenziale, si ha che

$Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$

(i) Per la valutazione neutrale al rischio

$$P_1(0,T) = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q}\left[100 \, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}\right] = 100 e^{-rT} Q(\tau > T) = 100 e^{-(r+\lambda)T}$$

(ii) $T = 2$ anni

$P_0 = 50 €$ $\qquad P_1 = 30 €$

$P_0 = 100 e^{-rT} \qquad P_1 = 100 e^{-(r+\lambda)T} = P_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{P_1}{P_0} = \frac{30}{50}$

$$\lambda = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{50}{30}\right) = \frac{1}{2} 0.5108 = 0.2554$$

$Q(\tau > T) = e^{-\lambda T} \qquad Q(\tau \leq T) = 1 - Q(\tau > T) = 1 - \frac{30}{50} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$

(iii) Ad un generico istante $t < T$:

$P_1(t,T) = 100 e^{-(r+\lambda)(T-t)} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \qquad t = 1$ anno $\quad T = 2$ anni $\quad T - t = 1$ anno

se $\tau > 1$ anno

$P_1(1,2) = 100 e^{-(r+\lambda)}$ $\quad$ dobbiamo calcolare il valore di r; sapendo che $P_0 = 50 = 100 e^{-rT} = 100 e^{-2r}$

$-2r = \ln\left(\frac{50}{100}\right) \qquad r = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln 2 = 0.3466$

$r = 34.66\ \%$

$$\Rightarrow P_1(1,2) = 100 e^{-(0.3466 + 0.2554)} = 100 e^{-0.602} = \frac{100}{1.82577} = 54.77 €$$

2) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$

DZCB recovery $1-\delta = 70\%$ e valore nominale 100 €

Per la valutazione neutrale al rischio

$$P_1(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + 70\, \mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} \right] =$$

$$= e^{-rT} \{ 100\, Q(\tau > T) + 70\, Q(\tau \le T) \} \qquad \text{essendo } Q(\tau \le T) = 1 - Q(\tau > T)$$

$$= e^{-rT} \{ 30\, Q(\tau > T) + 70 \}$$

$$= e^{-rT} \{ 70 + 30\, e^{-\lambda T} \}$$

(ii) $P_0 = 50$ € $\qquad P_1 = 40$ € $\qquad P_0 = 100\, e^{-rT} \qquad T = 3$ anni

Dalla formula sopra scritta segue che $P_1 = 100\, e^{-rT} \{ \underbrace{0.70}_{1-\delta} + \underbrace{0.30}_{\delta} e^{-\lambda T} \} = P_0 \{ 0.7 + 0.3\, e^{-\lambda T} \}$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = 0.7 + 0.3\, e^{-\lambda T}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{0.3}\left(\frac{P_1}{P_0} - 0.7 \right) = \frac{1}{0.3}\left(\frac{40}{50} - 0.7 \right) = 0.\overline{33} = \frac{1}{3}$$

$$q = Q(\tau \le T) = 1 - e^{-\lambda T} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$-\lambda T = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \lambda = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.366$$

(iii) Ora $1-\delta = 50\%$

$$\overline{P}_1(0,T) = 100\, e^{-rT} \{ 1-\delta + \delta\, e^{-\lambda T} \} = P_0 \{ 0.5 + 0.5 \cdot \tfrac{1}{3} \} = 50 \{ 0.5 + 0.5\, \tfrac{1}{3} \} = 33.\overline{33} \text{ €}$$

3) $r = 3\%$ $\qquad Q(\tau \leq T) = 0.08$ $\qquad T = 1$ anno

(i) $P_{RT}(0,T)$ $\qquad 1-\delta = 40\%$ $\qquad T = 1$ anno

Per la valutazione neutrale al rischio

$$P_{RT}(0,T) = 100\, e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + (1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] =$$

$$= 100\, e^{-rT} \left[Q(\tau > T) + (1-\delta)\, Q(\tau \leq T) \right\} =$$ essendo $Q(\tau \leq T) = 1 - Q(\tau > T)$

$$= 100\, e^{-rT} \left\{ 1-\delta + \delta\, Q(\tau > T) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad P_{RT}(0,T) = 100\, e^{-0.03 \cdot} \left\{ 0.40 + 0.60 \cdot \overset{0.92}{\cancel{0.08}} \right\}$$ $\qquad Q(\tau > T) = 1 - 0.08 = 0.92$

$$= 92.386 €$$

(ii) $Q(\tau > T) = e^{-\lambda T} = 0.92$ $\qquad T = 1$ anno

$-\lambda = \ln(0.92)$ $\qquad \lambda = -\ln(0.92) = 0.083$

$$V_0^{prem} = \frac{x_0^*}{2} \underbrace{Q(\tau > t_1)}_{e^{-\lambda t_1}} e^{-r t_1} + \frac{x_0^*}{2} \underbrace{Q(\tau > t_2)}_{e^{-\lambda t_2}} e^{-r t_2} = \frac{x_0^*}{2}\left(e^{-(\lambda+r)t_1} + e^{-(\lambda+r)t_2}\right)$$

$$V_0^{def} = \mathbb{E}^Q[\delta\, e^{-r\tau} \mathbb{1}_{(\tau \le T)}] \qquad f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{E}^Q[e^{-r\tau}\mathbb{1}_{(\tau\le T)}] = \int_0^T \lambda e^{-rt} e^{-\lambda t}\, dt = \int_0^T \lambda e^{-(r+\lambda)t}\, dt = -\frac{\lambda}{\lambda+r} e^{-(r+\lambda)t}\Big|_0^T$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+r}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)$$

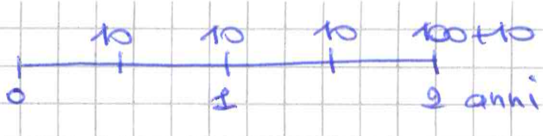
$$V_0^{def} = \delta \frac{\lambda}{\lambda+r}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)$$

x_0^* è t.c. $\quad V_0^{prem} = V_0^{def} \qquad x_0^* \left(\frac{e^{-(\lambda+r)t_1} + e^{-(\lambda+r)t_2}}{2}\right) = \frac{\lambda\delta}{\lambda+r}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)$

$$x_0^* = 2\,\frac{\frac{\lambda\delta}{\lambda+r}\left(1-e^{-(r+\lambda)T}\right)}{e^{-(r+\lambda)t_1} + e^{-(r+\lambda)t_2}} = 2\,\frac{\overbrace{\frac{0.01}{0.02}\cdot 0.5}^{0.25}\left(1 - e^{-0.02}\right)}{\underbrace{e^{-0.02\cdot \frac{1}{2}} + e^{-0.02}}_{0.98}} = 2\,\frac{0.255}{1.97} = 2\cdot 0.129 = 0.258$$

Il buyer ha acquisto 1'000 CDS deve pagare semestralmente $\frac{x_0^*}{2}\cdot 1'000 =$ ~~[illegible]~~ 129 €

4. Il Coupon bond prevede il seguente flusso di pagamenti:



10 € 6 mesi   10 € 12 mesi   10 € 18 mesi   10 € + 100 € 24 mesi

Nella valutazione dobbiamo tenere conto della possibilità di default, il prezzo è dato da

$$p(0,T) = \mathbb{E}^{Q}\left[110\, \mathbb{1}_{(\tau>T)} e^{-rT} + \sum_{t_i} 10\, e^{-r t_i}\, \mathbb{1}_{(\tau>t_i)} \right] \qquad i = 1, 2, 3$$

$$Q(\tau>t) = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad p(0,T) = 110\, e^{-rT} e^{-\lambda T} + \sum_{i=1}^{3} 10\, e^{-r t_i} e^{-\lambda t_i} =$$

$$= 110\, e^{-(r+\lambda)T} + 10\, e^{-(r+\lambda)\frac{1}{2}} + 10\, e^{-(r+\lambda)} + 10\, e^{-(r+\lambda)\frac{3}{2}}$$

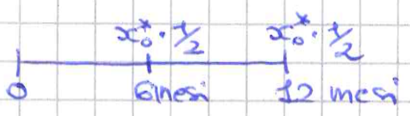
$$= 110\, e^{-(0.01+0.008)\cdot 2} + 10\left[e^{-0.018\cdot\frac{1}{2}} + e^{-0.018} + e^{-0.018\cdot 1.5} \right]$$

$$= 135.58\ €$$

5. CDS

fair CDS premium $\delta = 0.5$ $\lambda = 1\%$ $r = 1\%$ $T = 1$ anno

premi semestrali



$t_1 = 6$ mesi
$t_2 = T = 12$ mesi

$$V_0^{prem} = \mathbb{E}^{Q}\left[x_0^{*} \cdot \frac{1}{2}\, \mathbb{1}_{(\tau>t_1)} e^{-r t_1} + x_0^{*} \cdot \frac{1}{2}\, \mathbb{1}_{(\tau>t_2)} e^{-r t_2} \right]$$