

1. (7 punti)

Sia  $Q$  una misura neutrale al rischio e  $\tau$  il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale  $\lambda > 0$ . Sia  $r > 0$  il tasso d'interesse composto continuamente.

- Determinare il prezzo  $p_{RT}(0, T)$  di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a  $1 - \delta$ , di valore nominale  $x$  e maturità  $T$ .
- Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturità  $T = 2$  anni, pari a  $p_0 = 97$  euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturità, con  $\delta = 80\%$  pari a  $p_{RT} = 94$  euro. Determinare l'intensità di default  $\lambda$  dell'istituzione finanziaria.
- Calcolare il prezzo al tempo  $t = 0$  di un defaultable coupon bond emesso dalla stessa istituzione finanziaria di valore nominale 100 euro, maturità  $T = 2$  anni, che paga una cedola annuale pari a 20 euro e con tasso di recupero (solo sul valore nominale) del 20% pagabile alla scadenza.

2. (12 punti)

Il prezzo di un'azione è di 32\$. Ci si attende che in ciascuno dei tre prossimi trimestri il prezzo salga del 2% o scenda del 3%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente è del 3%.

- Qual'è il valore di una call europea con prezzo d'esercizio 31\$ e scadenza 9 mesi?
- Qual'è il valore della corrispondente put europea?
- Un investitore ha venduto 1000 call. Quale strategia di copertura deve mettere in atto in caso di rialzo alla fine del primo trimestre e ribasso del prezzo alla fine del secondo trimestre? (Verificare la copertura)

3. (9 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 5% e una volatilità (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse privo di rischio è del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirà un derivato, con scadenza  $T = 9$  mesi, di payoff finale  $F(S_T) = \frac{S_0}{S_T} - S_0^2$  e dove  $S_T$  è il prezzo dell'azione sottostante al tempo  $T$ . Oggi il prezzo dell'azione è di 40\$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:

- il prezzo  $v_0$  del derivato oggi;
- il prezzo del derivato  $v(t, x)$  al tempo  $t$  se  $S_t = x$ ;
- L'istituzione finanziaria ha venduto 10 derivati, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo  $t = 0$  per coprirsi dal rischio?

4. (5 punti)

Il prezzo di un'azione oggi è di 40\$ e paga una cedola semestrale di 8\$. Il tasso d'interesse privo di rischio è del 1% annuo.

- Qual'è il prezzo futuro teorico a 24 mesi?
- Dopo 16 mesi il prezzo dell'azione è sceso a 37\$. Qual'è in quel momento il valore unitario del contratto futuro per la posizione lunga.

Titoli derivati e Gestione del Rischio 1

$$a) P_{RT}(0, T) = e^{rT} \mathbb{E}^Q [x \mathbb{1}_{\tau > T} + x(1-\delta) \mathbb{1}_{\tau \leq T}]$$

$$= e^{-rT} x [Q(\tau > T) + (1-\delta) Q(\tau \leq T)]$$

$$= e^{-rT} x [e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T})]$$

$$= e^{-rT} x [(1-\delta) + \delta e^{-\lambda T}]$$

$$Q(\tau > T) = e^{-\lambda T}$$

$$Q(\tau \leq T) = 1 - e^{-\lambda T}$$

$$b) P_0 = 97 = 100 e^{-rT} \quad P_{RT}(0, T) = 94 \text{ €} \quad \delta = 80\%$$

$$94 = 97 (0.2 + 0.8 e^{-\lambda T})$$

$$\frac{94}{97} = 0.2 + 0.8 e^{-\lambda T} \quad 0.8 e^{-\lambda T} = \frac{94}{97} - 0.2$$

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{0.8} \left( \frac{94}{97} - 0.2 \right) \quad \lambda = -\frac{1}{T} \ln \left[ \frac{\frac{94}{97} - 0.2}{0.8} \right] = 1.94\%$$



$$P_{CB}(0, T) = P_{RT}(0, T) + \mathbb{E}^Q [20 e^{-rT} \mathbb{1}_{\tau > T} + 20 e^{-2rT} \mathbb{1}_{\tau > 2T}]$$

$$= P_{RT}(0, T) + 20 [e^{-rT} \frac{Q(\tau > T)}{e^{-rT}} + e^{-2rT} Q(\tau > 2T)] = \frac{94}{97} + 20 [e^{-(\pi + \lambda)T} + e^{-2(\pi + \lambda)T}]$$

$$= 94 + 20 [e^{-0.0349} + e^{-2 \cdot 0.0349}] = 131.966 \text{ €}$$

Calcoliamo le due volte di più:

$$97 = 100 e^{-2rT} \quad r = -\frac{1}{2T} \ln \left( \frac{97}{100} \right) = 1.52\% \Rightarrow \pi + \lambda = 3.49\%$$

2)  $S_0 = 32$  \$ \quad \text{w} = 2\% \quad \text{scenario} : 3\% \quad r = 3\%

call  $(S_T - K)^+ = (S_T - 31)^+$

$u = 1.02 \quad d = 0.97$

$S_u = S_0 + 0.02 \times S_0 = 1.02 S_0 = 32.64$  \$

$S_{uu} = 1.02 S_u = 33.2928$

$S_d = S_0 - 0.03 \times S_0 = 0.97 S_0 = 31.04$  \$

$S_{ud} = 0.97 S_u = 31.6608$

$S_{dd} = 0.97 S_d = 30.1088$

$S_{uuu} = S_{uu} \cdot u = 33.958656$

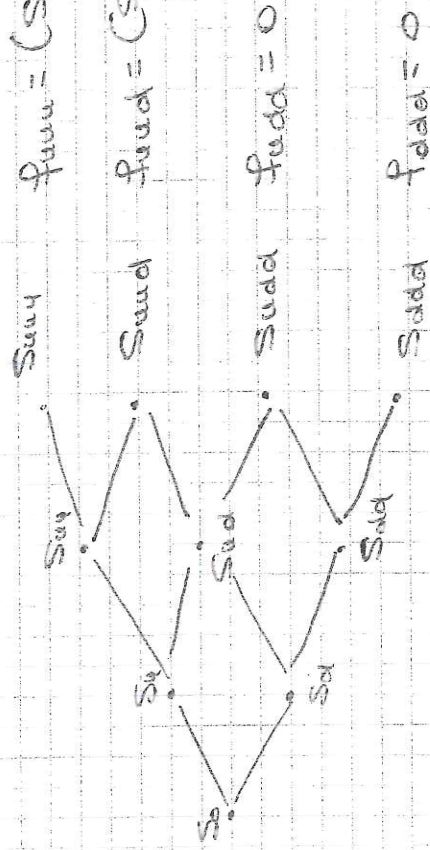
$f_{uuu} = (S_{uuu} - 31) = 2.958656$

$S_{uud} = S_{ud} \cdot u = 32.294016$

$f_{uud} = (S_{uud} - 31) = 1.294016$

$S_{udd} = S_{dd} \cdot u = 30.710976$

$S_{ddd} = S_{dd} \cdot d = 29.205536$



$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.03 \times 3/12} - 0.97}{1.02 - 0.97} = \frac{1.007528195 - 0.97}{1.02 - 0.97} = 0.750563908$$

$$1-p = 0.249436091 \quad e^{-r\Delta t} = 0.992528054$$

Incrediamo a ritroso sull'azione:

$$f_{uu} = e^{-r\Delta t} \{ f_{uup} + f_{uud}(1-p) \} = 2.524430296 \$$$

$$f_{ud} = e^{-r\Delta t} \{ f_{udu}p + f_{udd}(1-p) \} = 0.96398464 \$$$

$$f_{dd} = 0$$

$$f_u = e^{-r\Delta t} \{ f_{uup} + f_{uud}(1-p) \} = 2.119244739 \$$$

$$f_d = e^{-r\Delta t} \{ f_{udp} + f_{udd}(1-p) \} = 0.718125886 \$$$

$$f_0 = e^{-r\Delta t} \{ f_{up} + f_{d}(1-p) \} = 1.756531612 \$$$

$$T = 9 \text{ mesi}$$

b) Put-call parity  $P_0 + S_0 = C_0 + Ke^{-rT}$

$$P_0 = C_0 + Ke^{-rT} - S_0 = 1.7565316 + 31e^{-0.03 \times 9/12} - 32 = 0.0668415 \$$$

$$30.31028835$$

$$c) \quad \Delta_0, \Delta_1, (\Delta_1, \Delta_2), (\Delta_2, \Delta_3) \quad \text{Invest. Co. venduto 1000 call}$$

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 0.875693283 \quad \text{Acquista 875.693283 azioni, in prestito nel portafoglio 0}$$

$$-1000 \times f_0 + 875.693283 \times S_0 = 26'265.84545 \text{ \$}$$

$$\text{In caso di rialzo } S_1 = S_u$$

$$\Delta_{1,u} = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 0.956155428 \quad \text{Acquista altre 80.456142 azioni}$$

in prestito nel portafoglio co:

$$26'265.84545 e^{r\Delta t} + 80.456142 \times S_0 = 29'089.66833 \text{ \$}$$

$$\text{In caso di ribasso } S_2 = S_{ud}$$

$$\Delta_{2,ud} = \frac{f_{udu} - f_{udd}}{S_{udu} - S_{udd}} = 0.817424701 \quad \text{Vende 138.7307242 azioni}$$

in prestito nel portafoglio co:

$$29'089.66833 \cdot e^{r\Delta t} - 138.7307242 \times 31.6608 = 24'916.33537 \text{ \$}$$

Verifichiamo con calcolo: vende 817.424701 azioni e paga ee call

$$817.424701 \times S_T - 24'916.33537 \cdot e^{r\Delta t} = \int 1000 \text{ fund} = 0$$

$$16'855.22626 - 1'180.155362$$

$$26'221.224$$

$$S_T = S_{uu}$$

$$S_T = S_{udd}$$

3)  $\mu = 5\%$   $\sigma = 30\%$   $r = 2\%$   $S_0 = 40 \$$

$T = 2 \text{ mesi}$   $r(S_T) = \frac{S_T^3}{S_0} - \frac{S_0^3}{S_0}$

a)  $V_0 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \frac{S_T^3}{S_0} - S_0^3 \right]$

$S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \omega_T^P}$

$\{\omega_t^P\}$  moto browniano rispetto a  $Q$

$$\mathbb{E} \left[ \frac{S_T^3}{S_0} \right] = \frac{1}{S_0} \mathbb{E} \left[ S_0^3 e^{3(r - \frac{\sigma^2}{2})T + 3\sigma \omega_T^P} \right] = S_0^3 e^{3(r - \frac{\sigma^2}{2})T} \mathbb{E} \left[ e^{\frac{3\sigma^2}{2}T} \right] = S_0^3 e^{3(r + \sigma^2)T}$$

$$\Rightarrow V_0 = e^{-rT} \left\{ S_0^3 e^{3(r + \sigma^2)T} - S_0^3 \right\} = S_0^3 e^{(2r + 3\sigma^2)T} - S_0^3 e^{-rT}$$

$S_0 = 40 \$$   $V_0 = 40^3 (2 \cdot 0.02 + 3 \cdot 0.3^2) \frac{2}{12} - 40^3 e^{-0.02 \cdot \frac{2}{12}} = 442.62 \$$

b)  $v(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[ \frac{S_T^3}{S_0} - S_0^3 \mid S_t = x \right] = e^{-rT} \left\{ \frac{1}{S_0} \mathbb{E} [S_T^3 \mid S_t = x] - S_0^3 \right\}$

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(\omega_T^P - \omega_t^P)} = x^3 e^{3(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} e^{\frac{3\sigma^2}{2}(T-t)}$$

$$v(t, x) = \frac{x^3}{S_0} e^{(2r + 3\sigma^2)(T-t)} - S_0^3 e^{-r(T-t)}$$

c)  $\delta(t, x) = 3 \frac{x^2}{S_0} e^{(2r + 3\sigma^2)(T-t)}$

$\delta(0, S_0) = 3 S_0 e^{(2r + 3\sigma^2)T} = 3 \cdot 40 e^{(2 \cdot 0.02 + 3 \cdot 0.3^2) \frac{2}{12}}$

$\delta(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x}$

= 151.41  
deve acquistare 1514.10 azioni

151.41

4)  $S = 40 \$$   $T = 2 \text{ anni}$   $r = 1\%$

$$F_0 = (S - I) e^{rT}$$

I valore attuale cedole  
pagate in  $[0, T]$

$$I = 8 \left( e^{-\frac{1}{2} \cdot 0.01} + e^{-1.01} + e^{-\frac{3}{2} \cdot 0.01} + e^{-2.01} \right) = 31.60 \$$$

$$F_0 = (40 - 31.60) e^{2 \cdot 0.01} = 8.568 \$$$

$$S_t = 31 \$$$

$$t = 16 \text{ mesi}$$

$$T - t = 24 - 16 = 8 \text{ mesi}$$

$$F_t = (S_t - I_t) e^{r(T-t)}$$

$I_t$  valore di tempo  $t$  cedole  
pagate in  $[t, T]$

~~$I_t = 8 \left( e^{-\frac{1}{2} \cdot 0.01} + e^{-1.01} + e^{-\frac{3}{2} \cdot 0.01} + e^{-2.01} \right)$~~

$$I_t = 8 \left( e^{-\frac{1}{2} \cdot 0.01} + e^{-1.01} + e^{-\frac{3}{2} \cdot 0.01} + e^{-2.01} \right)$$

$$I_t = 8 \left( e^{-\frac{1}{2} \cdot 0.01} + e^{-1.01} + e^{-\frac{3}{2} \cdot 0.01} + e^{-2.01} \right) = 15.934 €$$

$$F_t = (31 - 15.934) e^{\frac{8}{12} \cdot 0.01} = 26.12 e^{\frac{2}{3} \cdot 0.01} = 21.207 \$$$

Valore del contratto posizione lunga

$$f_t = (F_t - F_0) e^{-r(T-t)}$$

$$= (21.207 - 8.568) e^{-0.01 \cdot \frac{8}{12}} = 12.56 \$$$