Scritto del 13/02/20

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (10 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.
a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0,T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1-\delta$, di valore nominale x e maturitá T.
b) Determinare il prezzo $p_{FV}(0,T)$ di un DZCB con recovery of face value (pagato al tempo di default) pari a $1-\delta$, di valore nominale x e maturitá T.
c) Assumere la probabilitá di default entro l'anno dell'istituzione finanziaria pari a $q = 0,15$, $r = 2\%$, $x = 100$ euro, $T = 6$ mesi e $\delta = 80\%$. Calcolare i prezzi $p_{RT}(0,T)$ e $p_{FV}(0,T)$.

2. (10 punti)
Il prezzo di un'azione é di 50\$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi semestri il prezzo salga del 5% o scenda del 5%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 5 %.
a) Qual'é il valore di un derivato di payoff finale $F(S_T) = 10\sqrt{\frac{S_T}{S_0}}$ e scadenza 12 mesi?
b) Un investitore ha venduto 1000 derivati. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare la copertura)

3. (8 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 6% e una volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 3% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale $F(S_T) = 10\sqrt{\frac{S_T}{S_0}}$, dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 60\$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
a) il prezzo v_0 del derivato oggi;
b) il prezzo del derivato $v(t,x)$ al tempo t se $S_t = x$;
c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(5 punti) Volete proteggervi dal rischio di deprezzamento del vostro portafoglio di 100 azioni Amazon. Oggi il prezzo di un'azione é di 100\$, acquistate 100 put di prezzo di esercizio $K = 95\$$ e maturitá $T = 1$ anno al prezzo $p = 0,30\$$.
a) Disegnare i grafici del valore del portafoglio al tempo T in funzione del prezzo dell'azione S_T, con la copertura mediante put e senza la copertura.
b) Per quali valori di S_T la copertura é stata conveniente?

Titoli Derivati e Gestione del Rischio I   Scritto del 13/02/2020   Prof. C. Ceci

1) $Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$ e $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t}$

a) $$P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}[x\,\mathbb{1}_{(\tau>T)} + x(1-\delta)\,\mathbb{1}_{(\tau\le T)}] = e^{-rT} x \{ \overbrace{Q(\tau>T)}^{e^{-\lambda T}} + (1-\delta)\overbrace{Q(\tau\le T)}^{1-e^{-\lambda T}} \}$$
$$= e^{-rT} x \{ e^{-\lambda T} + 1 - \delta - (1-\delta)e^{-\lambda T} \} = e^{-rT} x \{ \delta e^{-\lambda T} + (1-\delta) \}$$

b) $$P_{FV}(0,T) = \mathbb{E}^{Q}[x\, e^{-rT}\,\mathbb{1}_{(\tau>T)} + x(1-\delta)\, e^{-r\tau}\,\mathbb{1}_{(\tau\le T)}] = x\, e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta)\,\mathbb{E}^{Q}[e^{-r\tau}\,\mathbb{1}_{(\tau\le T)}]$$

Calcoliamo $$\mathbb{E}^{Q}[e^{-r\tau}\,\mathbb{1}_{(\tau\le T)}] = \int_0^{+\infty} e^{-rt}\,\mathbb{1}_{(t\le T)}\,\underbrace{f_\tau(t)}_{\lambda e^{-\lambda t}}\,dt = \int_0^T \lambda e^{-(r+\lambda)t}\,dt = -\frac{\lambda}{r+\lambda} e^{-(r+\lambda)t}\Big|_0^T$$
$$= \frac{\lambda}{r+\lambda}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)$$

$$P_{FV}(0,T) = x\, e^{-(r+\lambda)T} + x(1-\delta)\frac{\lambda}{r+\lambda}\left(1 - e^{-(r+\lambda)T}\right)$$

prob. di default entro l'anno

c) $q = Q(\tau \le 1) = 1 - e^{-\lambda} = 0.15$ $e^{-\lambda} = 0.85$ $\lambda = -\ln 0.85 = 0.1623$ $\lambda = 16.23\%$

$$P_{RT}(0,T) = e^{-0.02\cdot\frac{1}{2}}\, 100 \{ 0.80\, e^{-0.1623\cdot\frac{1}{2}} + 0.20 \} = 92.83 €$$

$$P_{FV}(0,T) = 100\, e^{-(0.02+0.1623)\cdot\frac{1}{2}} + 100 \cdot 0.2 \cdot \frac{0.1623}{0.02+0.1623}\left(1 - e^{-(0.02+0.1623)\cdot\frac{1}{2}}\right) = 92.84 €$$

Vale di più il FV che rimette il recupero al tempo di default

a) $S_0 = 50\$$ sale / scende del 5% $r = 10\%$ $F(S_T) = \sqrt{\frac{S_T}{S_0}} \cdot 10$

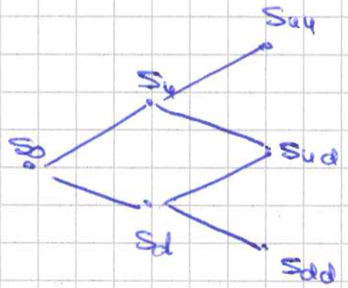
$S_u = S_0 + 0.05\, S_0 = 1.05\, S_0 = 52.5$

$S_d = S_0 - 0.05\, S_0 = 0.95\, S_0 = 47.5$

$S_{uu} = 1.05 \cdot 52.5 = 55.125$ $f_{uu} = \sqrt{\frac{55.125}{50}}\; 10 = 1.05 = 10.5$

$S_{ud} = 0.95 \cdot 52.5 = 49.875$ $f_{ud} = \sqrt{\frac{49.875}{50}}\; 10 = 0.9987 = 9.$

$S_{dd} = 0.95 \cdot 47.5 = 45.125$ $f_{dd} = \sqrt{\frac{45.125}{50}}\; 10 = 9.5$



$f_{uu} = 10.5$

$f_{ud} = 9.99$

$f_{dd} = 9.5$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.05 \cdot \frac{1}{2}} - 0.95}{1.05 - 0.95} = 0.75315$$

$1 - p = 0.2468488$ $e^{-r\Delta t} = 0.9753$

Procediamo a ritroso sull'albero

$f_u = e^{-r\Delta t}\{ f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p)\} = 10.134$ $f_d = e^{-r\Delta t}\{ f_{ud}\, p + f_{dd}(1-p)\} = 9.64045$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{ f_u\, p + f_d\,(1-p)\} = 9.765\,\$$

b) $\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1)\}$ strategia di copertura

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = \frac{10.134 - 9.64045}{52.5 - 47.5} = 0.09871$$

l'investitore deve acquistare 98,71 azioni nel portafoglio detiene la somma

$+ 1000 \cdot f_0 - 98.71\, S_0 = 4'829.35\$$

Dopo 6 mesi

$$\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_{1,u} = \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = \dfrac{10.5 - 9.99}{55.125 - 49.875} = 0.09714 & \text{se } S_1 = S_u \\ \Delta_{1,d} = \dfrac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = \dfrac{9.99 - 9.5}{49.875 - 45.125} = 0.10316 & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

in caso di rialzo ($S_1 = S_u$) l'investitore deve vendere $98.71 - 97.14 = 1.57$ azioni

nel portafoglio ha

$$4'829.35 \cdot e^{r\Delta t} + 1.57 \cdot 52.5 = 5'084 \$ \qquad e^{r\Delta t} = 1.025315$$

in caso di ribasso ($S_1 = S_d$) l'investitore deve acquistare $103.16 - 98.71 = 4.45$ azioni

nel portafoglio ha

$$4'829.35\, e^{r\Delta t} + 4.45 \cdot 47.5 = 4'740 \$$$

Verifichiamo la copertura, dopo 1 anno vende le azioni

se $S_1 = S_u$ nel portafoglio ha

$$5034\, e^{r\Delta t} + 97.14\, S_T = \begin{cases} 5'161.43 + 97.14\, S_{uu} = 10'516 \cong 100\, f_{uu} \\ 5'161.43 + 97.14\, S_{ud} = 10'006 \simeq 100\, f_{ud} \end{cases}$$

se $S_1 = S_d$ nel portafoglio ha

$$4'740\, e^{r\Delta t} + 103.16\, S_T = \begin{cases} 4'860 + 103.16\, S_{ud} = 10'005 \simeq 100\, f_{ud} \\ 4'860 + 103.16\, S_{dd} = 9'515 \simeq 100\, f_{dd} \end{cases}$$

3) $\mu = 6\%$ $\sigma = 30\%$ $r = 3\%$ $T = 12$ mesi $F(S_T) = 10\sqrt{\frac{S_T}{S_0}}$ $S_0 = 60\$$

$$v_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}[F(S_T)] = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{10}{\sqrt{S_0}}\sqrt{S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T^Q}}\right] = e^{-rT}\,10\,e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\,\underbrace{\mathbb{E}^{Q}\left[e^{\frac{1}{2}\sigma W_T^Q}\right]}_{=\,\mathbb{E}^{Q}\left[e^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}N}\right]\,=\,e^{\frac{\sigma^2 T}{8}}}$$

$$S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T^Q}$$

$\{W_t^Q\}$ moto browniano $\quad W_t^Q \sim \mathcal{N}(0,t)$

$W_t^Q \sim \sqrt{t}\,N$

$\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{\frac{a^2}{2}}$

$$v_0 = 10\,e^{-\frac{1}{2}rT}\,e^{-\frac{\sigma^2}{8}T} = 10\,e^{-\frac{1}{2}\cdot 0.03}\,e^{-\frac{0.3^2}{8}} = 9.7409\$$$

b) $$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{Q}[F(S_T)\mid S_t = x] = \frac{10}{\sqrt{S_0}}\,e^{-r(T-t)}\sqrt{x}\,e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\,\mathbb{E}^{Q}\left[e^{\frac{1}{2}\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}\right]$$

$$= 10\sqrt{\frac{x}{S_0}}\,e^{-\frac{1}{2}r(T-t)}\,e^{-\frac{\sigma^2}{8}(T-t)}$$

c) $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{10}{\sqrt{S_0}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{-\frac{1}{2}r(T-t)}\,e^{-\frac{\sigma^2}{8}(T-t)} = \delta(t,x)$$

$$\delta_0 = \delta(0,S_0) = \frac{5}{S_0}\,e^{-\frac{1}{2}rT}\,e^{-\frac{\sigma^2}{8}T} = 0.085$$

0.0812

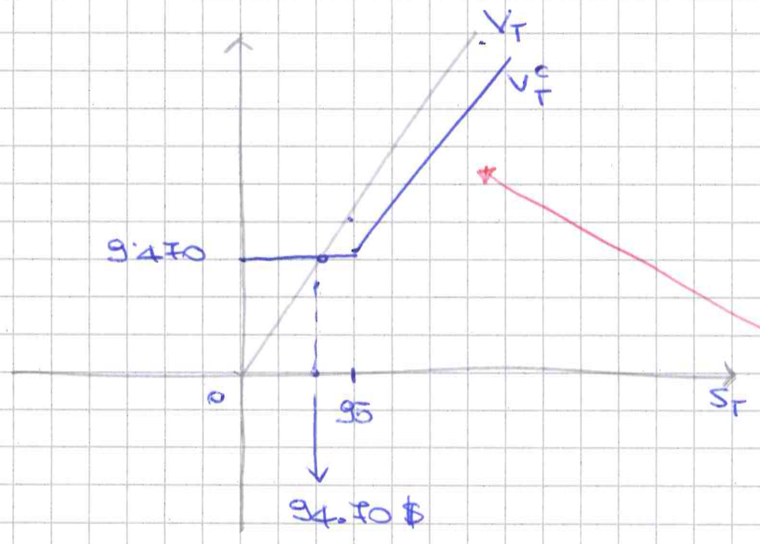
L'istituzione finanziaria deve acquistare 85 azioni

4) $S_0 = 100\$$ 100 put $p = 0.3\$$ $T = 1$ anno $K = 95\$$

Valore del portafoglio senza la copertura al data T: $V_T = 100 \cdot S_T$

Valore del portafoglio con la copertura:

$$V_T^c = 100\, S_T + 100\,(K - S_T)_+ - 100 \cdot p = \begin{cases} 100\,(K - p) = 9'470\,\$ & \text{se } S_T < K \\ 100\, S_T - 100\, p = 100\,(S_T - 0.30) = 100\, S_T - 30 & \text{se } S_T \geq K \end{cases}$$



$V_T^c > V_T$ se $9'470 > 100 \cdot S_T$

$S_T < 94.70\,\$$

a fronte del pagamento di 30\$ blocca il valore del portafoglio in caso di ribasso del prezzo dell'azione.

La copertura risulta essere vantaggiosa per valori del prezzo $S_T < 94.70\,\$$