Scritto del 27/02/20

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (5 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0,T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1-\delta$, di valore nominale x e maturitá T.

b) Oggi il prezzo di un DZCB con recovery of treasury $1-\delta = 50\%$, valore nominale 100$ e maturitá $T = 2$ anni é pari 85$ e $\lambda = 10\%$. Determinare il tasso di interesse privo di rischio r.

2. (11 punti)

Il prezzo di un'azione é di 20$. Ci si attende che in ciascuno dei tre prossimi quadrimestri il prezzo salga del 20% o scenda del 20%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 5%.

a) Qual'é il valore di una call europea con prezzo d'esercizio $k = 20\$$ e scadenza 12 mesi?

b) Qual'é il valore della put europea corrispondente?

c) Un investitore ha venduto 10 call. Quale strategia di copertura deve mettere in atto se il prezzo dell'azione ha un rialzo alla fine del primo quadrimestre ed un ribasso alla fine del secondo quadrimestre? (Verificare la copertura)

3. (11 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 10% e una volatilitá (annua) pari al 30%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 5% annuo. Oggi il prezzo dell'azione é di 50$.

a) Calcolare la probabilitá che tra un anno il prezzo dell'azione scenda sotto 45$.

Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza un anno di payoff finale $F(S_T) = F_1(S_T) + F_2(S_T)$, ove $F_1(S_T) = \frac{100}{S_T}$, $F_2(S_T) = 10I_{\{S_T<45\}}$ e S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:

b) il prezzo v_0 del derivato oggi;

c) il prezzo $v_1(t,x)$ al tempo t se $S_t = x$, del derivato di payoff finale $F_1(S_T)$;

d) L'istituzione finanziaria ha venduto 1.000 derivati di payoff finale F_1, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(6 punti)

Determinare e tracciare il grafico del payoff finale in funzione del prezzo del sottostante di

a) uno spread al rialzo ottenuto acquistando una call con prezzo di esercizio k_1 e maturitá T e vendendo una call con prezzo di esercizio $k_2 > k_1$ e stessa maturitá.

b) uno spread al ribasso ottenuto vendendo una put con prezzo di esercizio k_1 e maturitá T e acquistando una put con prezzo di esercizio k_2 e stessa maturitá.

c) Determinare il payoff finale ottenuto combinando i 2 spread e determinarne il prezzo mostrando la coerenza con la relazione di paritá.

Scritto del 27/2/2020

1) $\tau \sim \exp(\lambda)$ $\qquad Q(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ $\qquad Q(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $\qquad \forall t \geq 0$

a) $P_{RT}(0,T) = e^{-rT} x \, \mathbb{E}^{Q}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + (1-\delta)\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}] =$

$= e^{-rT} x \{ Q(\tau > T) + (1-\delta) Q(\tau \leq T) \} = x e^{-rT} \{ e^{-\lambda T} + (1-\delta)(1 - e^{-\lambda T}) \}$

$= x e^{-rT} \{ \delta e^{-\lambda T} + (1-\delta) \}$

b) $1-\delta = 50\%$ $\qquad x = 100\,\$$ $\qquad T = 2$ anni $\qquad \lambda = 10\%$

$P_{RT}(0,T) = 85 = e^{-rT} x (\delta e^{-\lambda T} + (1-\delta)) \Rightarrow e^{-rT} = \dfrac{85}{100(0.50\, e^{-0.10 \cdot 2} + 0.50)}$

$r = -\dfrac{1}{T} \ln \left(\dfrac{85}{90.93654} \right) = 0.03376$ $\qquad r = 3.376\ \%$

2) $S_0 = 20\,\$$ $\qquad$ 3 quadrimestri $\qquad \Delta t = \dfrac{4}{12}$ anno $= \dfrac{1}{3}$ anno $\qquad T = 1$ anno

$K = 20$ $\quad r = 5\%$ $\quad u = 1.20$ $\quad d = 0.80$

$S_u = 20 + 20 \cdot 0.20 = 24\,\$$ $\qquad S_{uu} = 28.8\,\$$ $\qquad S_{uuu} = 34.56\,\$$

$S_d = 20 - 20 \cdot 0.20 = 16\,\$$ $\qquad S_{ud} = 19.2\,\$$ $\qquad S_{uud} = 23.04\,\$$

$S_{dd} = 12.8\,\$$ $\qquad S_{udd} = 15.36\,\$$

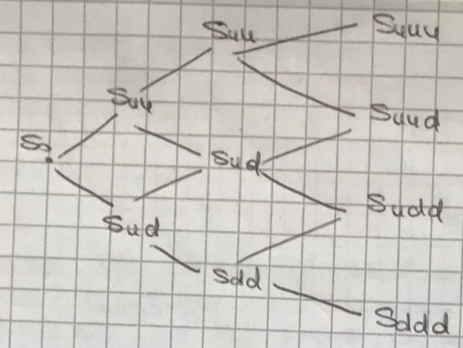
$S_{ddd} = 10.24\,\$$

$p = \dfrac{e^{0.05 \cdot 1/3} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.54203$ $\qquad 1 - p = 0.45797$

$e^{-r\Delta t} = 0.98347$

payoff call

$(S_T - K)_+$



$f_{uuu} = (S_{uuu} - 20)_+ = 14.56\$$

$f_{uud} = (S_{uud} - 20)_+ = 3.04\$$

$f_{udd} = (S_{udd} - 20)_+ = 0$

$f_{ddd} = (S_{ddd} - 20)_+ = 0$

Procediamo a ritroso sull'albero

$f_{uu} = e^{-r\Delta t}\{f_{uuu}\,p + f_{uud}(1-p)\} = 9.13072$

$f_{ud} = e^{-r\Delta t}\{f_{udu}\,p + f_{udd}(1-p)\} = 1.62053$

$f_{dd} = 0$

$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}p + f_{ud}(1-p)\} = 5.5972$

$f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{ud}\,p + f_{dd}(1-p)\} = 0.86386$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u p + f_d(1-p)\} = 3.37278\$$

b) Relazione di parità $\quad c + Ke^{-rT} = p + S_0$

$p = 3.37278 + 20e^{-0.05} - 20 = 2.39737\$$

c) L'investitore ha venduto 10 call. Strategia di copertura $\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1), (\Delta_2, B_2)\}$

$\Delta_0 = \dfrac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 0.59167$

al tempo $t = 0$ acquista 59,167 azioni in prestito ha: $59{,}167 \cdot S_0 - 100 f_0 = 84{,}6062\$$

2

Dopo $\Delta t = 4$ mesi in caso di rialzo $S_1 = S_u$

$$\Delta_{1,u} = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 0.78231$$

L'investitore deve acquistare altre $78,231 - 59,167 = 19,064$ azioni

in prestito ha: $846,062\, e^{r\Delta t} + 19,064\, S_u = 1317,820\$$

Dopo altri 4 mesi in caso di ribasso $S_2 = S_{ud}$

$$\Delta_{2,ud} = \frac{f_{uud} - f_{udd}}{S_{uud} - S_{udd}} = 0.39583$$

L'investitore deve vendere $78,231 - 39,583 = 38,648$ azioni

in prestito ha: $1317,82\, e^{r\Delta t} - 38,648\, S_{ud} = 597,93\$$

Verifichiamo la copertura: al tempo $T = 1$ anno vende le $39,583$ azioni e restituisce il prestito, nel portafoglio ha

$$39,583\, S_T - 597,93\, e^{r\Delta t} = \begin{cases} 30,4 = 10\, f_{uud} & \text{se } S_T = S_{uud} \\ 0,013 \simeq 10\, f_{udd} = 0 & \text{se } S_T = S_{udd} \end{cases}$$

3) $\mu = 10\%$ $\quad \sigma = 30\%$ $\quad r = 5\%$ $\quad S_0 = 50\,\$$

$T = 1$ anno $\quad S_T = S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T}$ $\quad \{W_T\}$ moto browniano

$W_T \sim \mathcal{N}(0,T)$

$W_T \sim \sqrt{T}\, N \qquad N \sim \mathcal{N}(0,1)$

a)

$$P(S_T \le 45) = P\left(S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} \le 45 \right) = P\left(e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} \le \frac{45}{S_0} \right) =$$

$$P\left((\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T \le \ln\left(\frac{45}{S_0}\right)\right) = P\left(\sigma\sqrt{T}\, N \le \ln\left(45/S_0\right) - (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})T \right)$$

$$= P\left(N \le \frac{\ln(45/S_0) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) = \Phi\left(\frac{\ln(45/50) - (0.1 - \frac{0.3^2}{2})}{0.3} \right) = \Phi(-0.535) = 0.2946$$

b)

$$v_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[F(S_T)] = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[F_1(S_T)] + e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[F_2(S_T)] = 1.98 + 3.3835 = 5.3635\,\$$$

Rispetto alla misura neutrale al rischio Q $\quad S_T = S_0\, e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{Q}}$ $\quad \{W_T^{Q}\}$ Q-moto brown.

$$v_1 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[F_1(S_T)] = 100 e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[S_T^{-1}] = \frac{100 e^{-rT}}{S_0}\, e^{-(r - \frac{\sigma^2}{2})T}\, \underbrace{\mathbb{E}^{Q}[e^{-\sigma W_T^{Q}}]}$$ $\qquad \mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$$\mathbb{E}^{Q}[e^{-\sigma\sqrt{T} N}] = e^{\sigma^2 T/2}$$

$$v_1 = \frac{100}{S_0}\, e^{-(2r - \sigma^2)T} = \frac{100}{50}\, e^{-(2\cdot 0.05 - 0.3^2)} = 1.98\,\$$$

$$v_2 = e^{-rT}\, 10\, Q(S_T < 45) = 10 e^{-rT}\, \Phi\left(\frac{\ln(45/50) - (\overset{r}{\overset{\shortparallel}{0.05}} - \frac{0.3^2}{2})}{0.3} \right) = 10 e^{-rT}\, \Phi(-0.368)$$

$\downarrow$

si procede come

al punto a) sostituendo a μ, r

$= 10\, e^{-rT}\, 0.3557$

$= 3.3885\,\$$

c) $v_1(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[100\, S_T^{-1} \mid S_t = x\right]$ $\qquad S_T = S_t\, e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}\right)}$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$

$\sim \sqrt{T-t}\, N$

$$v_1(t,x) = \frac{100 e^{-r(T-t)}}{x}\, e^{-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}\right)}\right] =$$

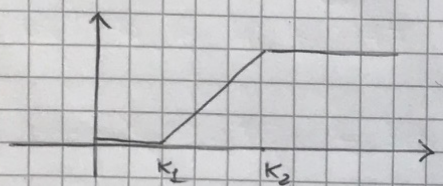
$$= \frac{100}{x} e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)}$$

d) $\delta(t,x) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -\dfrac{100}{x^2} e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)}$ $\qquad \delta(0,S_0) = -\dfrac{100}{S_0^2} e^{(-2\cdot 0.05 + 0.3^2)\cdot 1}$ $= -0.03.96$

L'investitore deve vendere allo scoperto 39.6 azioni

4) call lunga K_1
call corta K_2

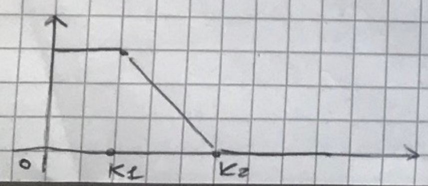
$$(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T < K_1 \\ S_T - K_1 & \text{se } K_1 \le S_T < K_2 \\ K_2 - K_1 & \text{se } S_T \ge K_2 \end{cases}$$



spread al rialzo

put lunga K_2
put corta K_1

$$(K_2 - S_T)_+ - (K_1 - S_T)_+ = \begin{cases} K_2 - K_1 & \text{se } S_T < K_1 \\ K_2 - S_T & \text{se } K_1 \le S_T < K_2 \\ 0 & \text{se } S_T \ge K_2 \end{cases}$$



spread al ribasso

Payoff complessivo: $\begin{cases} K_2 - K_1 & \text{se} \quad S_T < K_1 \\ S_T - K_1 + K_2 - S_T = K_2 - K_1 & K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & \text{se} \quad S_T \geq K_2 \end{cases} \quad = K_2 - K_1$

Costo complessivo = prezzo spread al rialzo + prezzo spread al ribasso

$$= c_1 - c_2 + p_2 - p_1 = (K_2 - K_1)\, e^{-rT}$$

Coerente con la relazione di parità: $\quad p_1 + S_0 = K_1 e^{-rT} + c_1$

$$p_2 + S_0 = K_2 e^{-rT} + c_2$$

$$p_2 - p_1 = c_2 - c_1 + (K_2 - K_1)\, e^{-rT} \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 + c_1 - c_2 = (K_2 - K_1)\, e^{-rT}$$