Scritto del 11/06/20
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I
Prof.ssa Claudia Ceci

1. (8 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.
a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0,T)$ al tempo $t = 0$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturitá T.
b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 3$ anni, pari a $p_0 = 95$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá, con $\delta = 70\%$ pari a $p_{RT} = 93$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria.
c) Calcolare il prezzo al tempo $t = 0$ di un defaultable coupon bond emesso dalla stessa istituzione finanziaria di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 2$ anni, che paga cedole annuali pari a 20 euro.

2. (10 punti)
Il prezzo di un'azione é di 100\$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi semestri il prezzo salga del 10% o scenda del 10%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 10%.
a) Calcolare il prezzo di un call con prezzo di esercizio $K = 100\$$ e scadenza 12 mesi.
b) Calcolare il prezzo della put corrispondente.
c) Un investitore ha venduto 1000 derivati. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare la copertura)

3. (9 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 10% e una volatilitá (annua) pari al 40%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale

$$F(S_T) = \frac{S_0}{100} + (S_T)^{\frac{1}{3}},$$

dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di $S_0 = 50\$$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
a) il prezzo v_0 del derivato oggi;
b) il prezzo del derivato $v(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;
c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(6 punti)
Volete speculare sul rialzo del prezzo delle azioni Amazon e avete 10.000\$ da investire. Oggi il prezzo di un'azione Amazon é di 100\$, il prezzo di una call con prezzo di esercizio $K = 100\$$ e maturitá $T = 1$ anno é pari $c = 1\$$.
a) Individuare la strategia di investimento in azioni.
b) Individuare la strategia di investimento con le calls.
c) Per quali valori del prezzo dell'azione S_T la strategia b) é piú vantaggiosa della strategia a).

Titoli Derivati e Gestione del Rischio I   scritto dell' 11/6/2020

Prof.ssa Claudia Ceci

1) $\tau \sim \exp(\lambda) \qquad Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$

(a) $P_{RT}(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}\left[x\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] =$

$$= e^{-rT} \{ x \underbrace{Q(\tau > T)}_{e^{-\lambda T}} + x(1-\delta) \underbrace{Q(\tau \leq T)}_{1-e^{-\lambda T}} \} = x e^{-rT} \{ (1-\delta) + \delta e^{-\lambda T} \}$$

(b) $P_0(0,T) = 100\, e^{-rT} = 95€ \qquad T = 3$ anni

$P_{RT}(0,T) = 100\, e^{-rT} \{0.3 + 0.7\, e^{-\lambda T}\} = 93€ \qquad P_{RT}(0,T) = P_0(0,T)\{0.3 + 0.7\, e^{-\lambda T}\}$

$$\frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)} = 0.3 + 0.7\, e^{-\lambda T} \qquad e^{-\lambda T} = \frac{1}{0.7}\left\{ \frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)} - 0.3 \right\}$$

$$-\lambda T = \ln\left(\frac{1}{0.7}\left(\frac{93}{95} - 0.3 \right) \right) \qquad \lambda = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{0.7}\left(\frac{93}{95} - 0.3 \right) \right) = 0.010$$

(c)

$$V_1 = e^{-r}\, \mathbb{E}^{Q}[20\, \mathbb{1}_{\{\tau > 1\}}] + e^{-2r}\, \mathbb{E}^{Q}[20\, \mathbb{1}_{\{\tau > 2\}}] + e^{-2r}\, \mathbb{E}^{Q}[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > 2\}}]$$

$$= 20\, e^{-r} \underbrace{Q(\tau > 1)}_{e^{-\lambda}} + 120\, e^{-2r} \underbrace{Q(\tau > 2)}_{e^{-2\lambda}} = 20\, e^{-(r+\lambda)} + 120\, e^{-2(r+\lambda)}$$

Determiniamo r: $\quad 100\, e^{-rT} = 95 \qquad e^{-3r} = \frac{95}{100} \qquad r = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{95}{100}\right) = 0.017 \qquad r = 1.7\%$

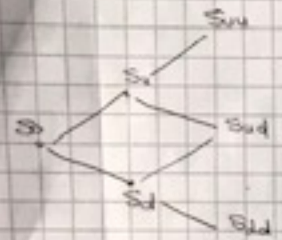
$\lambda = 1\% \qquad r + \lambda = 2.7\%$

$$V_1 = 20\, e^{-0.027} + 120\, e^{-2 \cdot 0.027} =$$

2) $S_0 = 100\$$ $\quad r = 10\%$ $\quad$ 2 semestri $\quad$ sale e scende del 10 % $\quad \Delta t = \frac{1}{2}$

$S_u = 100 + 0.10 \cdot 100 = 110\$$ $\quad S_d = 100 - 0.10 \cdot 100 = 90\$$ $\quad u = 1.10$, $d = 0.90$

$S_{uu} = 121\$$ $\quad S_{ud} = 99\$$ $\quad S_{dd} = 81\$$ $\quad$ call $F(S_T) = (S_T - K)_+$



$f_{uu} = (S_{uu} - 100)_+ = 21$

$f_{ud} = (S_{ud} - 100)_+ = 0$

$f_{dd} = (S_{dd} - 100)_+ = 0$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.10 \cdot \frac{1}{2}} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.756355$$

$1 - p = 0.243645$

$e^{r\Delta t} = 1.051271$ $\quad e^{-r\Delta t} = 0.95123$

Procediamo a ritroso sull'albero

$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}p + f_{ud}(1-p)\} = 15.1088$ $\quad f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{ud}p + f_{dd}(1-p)\} = 0$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u p + f_d(1-p)\} = 10.87\$ = C_0$

(b) Dalle relazion di parità put-call : $\quad C_0 + Ke^{-rT} = P_0 + S_0$

$P_0 = C_0 + Ke^{-rT} - S_0 = 10.87 + 100\,e^{-0.1} - 100 = 1.3587\$$

(c) Un investitore ha venduto 1000 derivati, strategia di copertura $\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1)\}$

$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 0.75544$ $\quad$ al tempo $t=0$ acquista 755.44 azioni, in prestito nel portafoglio ha :

$755.44\, S_0 - 1000 \cdot 10.87 = 64'674\$$

Dopo 6 mesi

$$\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_{1u} = \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 0.95455 & \text{se } S_1 = S_u \\ \Delta_{1d} = \dfrac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = 0 & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

In caso di rialzo, $S_1 = S_u$, acquisto altre $954.55 - 755.44 = 199.11$ azioni, in prestito nel portafoglio ho

$$64'674\, e^{r\Delta t} + 199.11 \cdot 110 = 89'891.5\ \$$$

In caso di ribasso, $S_1 = S_d$, vendo le 755.44 azioni, in prestito nel portafoglio ho

$$64'674\, e^{r\Delta t} - 755.44 \cdot 90 = 0\ \$$$

Verifichiamo la copertura, dopo 1 anno:

se $S_1 = S_u$ vendiamo le azioni e restituiamo il prestito nel portafoglio ho

$$954.55 \cdot S_T - 89'891.50 \cdot e^{r\Delta t} = \begin{cases} 954.55\, S_{uu} - 89'891.5\, e^{r\Delta t} = 21'000 \simeq 1000\, f_{uu} \\ 954.55\, S_{ud} - 89'891.5\, e^{r\Delta t} \simeq 1000\, f_{ud} = 0 \end{cases}$$

se $S_1 = S_d$ non dobbiamo fare nulla

3) $\mu = 10\%$ $\sigma = 40\%$ $r = 2\%$ $T = 12$ mesi

$$F(S_T) = \frac{S_0}{100} + (S_T)^{1/3} = \frac{1}{2} + (S_T)^{1/3} \qquad S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q}$$

$\{W_t^Q\}$ moto browniano rispetto alla misura neutrale al rischio Q

$$V_0 = e^{-rT} E^Q[F(S_T)] = e^{-rT} \cdot \frac{1}{2} + e^{-rT} E^Q\left[S_0^{1/3} e^{\frac{1}{3}(r-\frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{1}{3}\sigma W_T^Q}\right]$$

$$= e^{-rT}\left\{\frac{1}{2} + S_0^{1/3} e^{\frac{1}{3}(r-\frac{\sigma^2}{2})T} \underbrace{E^Q\left[e^{\frac{1}{3}\sigma\sqrt{T} N}\right]}_{e^{\frac{\sigma^2}{18}T}}\right\}$$

$W_T^Q \sim \sqrt{T} N$ ove $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$E[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$$V_0 = e^{-rT}\left\{\frac{1}{2} + \sqrt[3]{50}\, e^{\frac{1}{3}rT} e^{-\frac{1}{9}\sigma^2 T}\right\} = e^{-0.02}\left\{0.5 + 3.68\, e^{\frac{1}{3}\cdot 0.02 - 0.178}\right\} = 3.529 \$$$

b) $$V(t,x) = e^{-r(T-t)} E^Q\left[\frac{1}{2} + (S_T)^{1/3} \,\middle|\, S_t = x\right] =$$

$S_T = S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$

$W_T^Q - W_t^Q \sim \sqrt{T-t}\, N$

$$= e^{-r(T-t)}\left\{\frac{1}{2} + \sqrt[3]{x}\, e^{\frac{1}{3}r(T-t)} e^{-\frac{1}{9}\sigma^2(T-t)}\right\}$$

c) $$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} e^{-\frac{2}{3}r(T-t)} e^{-\frac{1}{9}\sigma^2(T-t)}$$

$$\delta(0,S_0) = \frac{\partial V}{\partial x}(0,S_0) = \frac{1}{3}(50)^{-2/3} e^{-\frac{2}{3}rT} e^{-\frac{1}{9}\sigma^2 T} = 0.0245\, e^{-\frac{2}{3}\cdot 0.02 - \frac{1}{9}0.4^2} = 0.0237$$

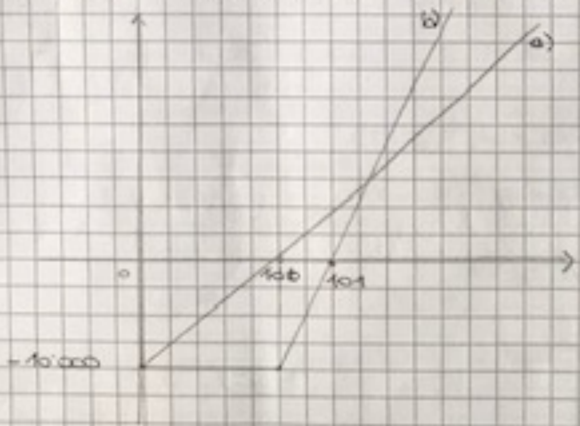
L'investitore per coprirsi dal rischio deve acquistare 23.7 azioni

4) $S_0 = 100\$$ call $K = 100\$$ $T = 1$ anno $c = 1\$$

a) acquistiamo azioni oggi e le rivendiamo tra 1 anno
con 10'000\$ acquistiamo 100 azioni, al tempo T $100(S_T - \overset{100}{S_0})$ profitti

b) acquistiamo le call: con 10'000\$ acquistiamo 10'000 call
al tempo T $10'000(S_T - K)_+ - 10'000 = \begin{cases} 10'000(S_T - 100) - 10'000 & S_T > 100 \\ -10'000 & S_T < 100 \end{cases}$

Riportiamo i profitti/perdite tramite un grafico



Conviene la speculazione con le calls se

$$10'000(S_T - 100) - 10'\cancel{000} > 100(S_T - 10'\cancel{000}$$

$$100(S_T - 100) > S_T$$

$$99\,S_T > 10'000$$

$$S_T > 101{,}01\,\$$$

Se il prezzo delle azioni sale oltre 101.01\$ è preferibile la strategia con le calls.
Le calls offrono una leva finanziaria, a parità di investimento iniziale è possibile realizzare significativi guadagni

51