Scritto del 02/07/20
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I
Prof.ssa Claudia Ceci

1. (8 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda = 5\%$. Sia $r = 2\%$il tasso d'interesse composto continuamente.
a) Determinare il prezzo $p_1(0,T)$ al tempo $t = 0$ di un DZCB (senza recovery) di valore nominale 100 euro e maturitá $T = 3$ anni.
b) Il prezzo $\widetilde{p}_1(0,T)$ al tempo $t = 0$ di un DZCB, (senza recovery) di stesso valore nominale e maturitá, emesso da una seconda istituzione finanziaria vale 85 euro, determinare la differenza di rendimento tra i due bond.
c) Calcolare il prezzo al tempo $t = 0$ di un DCB emesso dalla seconda istituzione finanziaria di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 5$ anni, che paga cedole annuali pari a 50 euro.

2. (11 punti)
Il prezzo di un'azione é di 100$. Ci si attende che in ciascuno dei tre prossimi semestri il prezzo salga del 20% o scenda del 20%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 5%.
a) Calcolare il prezzo di una put con prezzo di esercizio $K = 100\$$ e scadenza 18 mesi.
b) Calcolare il prezzo della call corrispondente.
c) Un investitore ha venduto 100 put. Quale strategia di copertura deve mettere in atto in caso di rialzo del prezzo dell'azione al primo semestre e al secondo semestre? (Verificare la copertura)

3. (9 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 10% e una volatilitá (annua) pari al 50%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 1% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale

$$F(S_T) = \frac{1}{S_T}$$

dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di $S_0 = 10$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
a) il prezzo v_0 del derivato oggi;
b) il prezzo del derivato $v(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;
c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(5 punti)
Volete proteggervi dal deprezzamento del vostro portafoglio di 500 azioni Amazon. Oggi il prezzo di un'azione Amazon é di 100$, il prezzo di una put con prezzo di esercizio $K = 100\$$ e maturitá $T = 1$ anno é pari $p = 2\$$. Vi proteggete mediante le put.
a) Determinare il valore del portafoglio al tempo $T = 1$ anno senza copertura e con la copertura mediante put (tracciare il grafico in funzione di S_T).
b) Per quali valori di S_T il portafoglio con la copertura é piú vantaggioso?

Scritto Titoli Derivati e gestione del Rischio I 2/7/2020 Prof.ssa Claudia Ceci

1) $\lambda = 5\%$ $\quad r = 2\%$ $\quad Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$

a) $P_1(0,T) = e^{-rT}\, \mathbb{E}^Q[\,100\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}\,] = e^{-rT}\, 100\, \underbrace{Q(\tau > T)}_{e^{-\lambda T}} = 100\, e^{-(r+\lambda)T} = 100\, e^{-0.07 \cdot 3} =$

$= 81.06$ €

b) $\tilde{P}_1(0,T) = 85$ €

Differenza di rendimento tra i 2 bond: $P_1(0,T) = 81.06 = 100\, e^{-\overbrace{(r+\lambda)}^{R_1}T}$ $\quad R_1$ rendimento ist. 1

$\tilde{P}_1(0,T) = 85 = 100\, e^{-\underbrace{(r+\tilde{\lambda})}_{\tilde{R}_1}T}$ $\quad \tilde{R}_1$ rendimento ist. 2

$$\frac{\tilde{P}_1}{P_1} = \frac{100\, e^{-\tilde{R}_1 T}}{100\, e^{-R_1 T}} = e^{-(\tilde{R}_1 - R_1)T}$$

$$\tilde{R}_1 - R_1 = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{\tilde{P}_1}{P_1}\right) = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{85}{81.06}\right) = -0.0158$$

La seconda istituzione ha un rendimento inferiore della prima istituzione

$\tilde{R}_1 = R_1 - 0.0158 = 0.07 - 0.0158 =$

$= 0.0542$

c) DCB

t	1	2	3	4	5
	50	50	50	50	100+50

$$P_c(0,T) = 50\, \mathbb{E}^Q\left[e^{-r} \mathbb{1}_{(\tau > 1)} + e^{-2r} \mathbb{1}_{(\tau > 2)} + \dots + e^{-5r} \mathbb{1}_{\{\tau > 5\}}\right] + 100\, e^{-5r}\, \mathbb{E}^Q[\,\mathbb{1}_{(\tau > 5)}\,]$$

$$= 50\left\{e^{-(r+\tilde{\lambda})} + e^{-2(r+\tilde{\lambda})} + e^{-3(r+\tilde{\lambda})} + e^{-4(r+\tilde{\lambda})}\right\} + 150\, e^{-5(r+\tilde{\lambda})}$$

abbiamo utilizzato che $\mathbb{E}^Q[\,\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}\,] = e^{-\tilde{\lambda} t}$

$r + \tilde{\lambda} = \tilde{R}_1 = 0.0542$ $\qquad P_c(0,T) = 89.81$ €

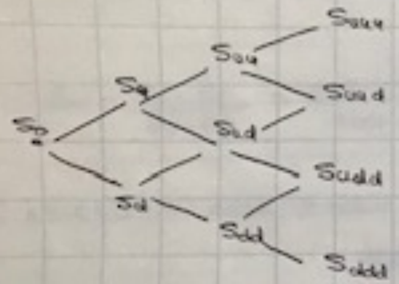
2) $S_0 = 100\,\$$ put $(K - S_T)_+ = (100 - S_T)_+ = F(S_T)$

$S_u = 100 + 100 \times 0.20 = 120$ $S_{uu} = u\,S_u = 144$ $S_{uuu} = u\,S_{uu} = 172.8$

$S_d = 100 - 100 \times 0.20 = 80$ $S_{ud} = d\,S_u = 96$ $S_{uud} = d\,S_{uu} = 115.2$

$u = 1.20$ $d = 0.80$ $S_{dd} = d\,S_d = 64$ $S_{udd} = d\,S_{ud} = 76.8$

$S_{ddd} = d\,S_{dd} = 51.2$



$F(S_{uuu}) = (100 - S_{uuu})_+ = 0$

$F(S_{uud}) = (100 - S_{uud})_+ = 0$

$F(S_{udd}) = (100 - S_{udd})_+ = 23.2$

$F(S_{ddd}) = (100 - S_{ddd})_+ = 48.8$

$T = 18$ mesi

$\Delta t = 6$ mesi $= \frac{1}{2}$ anni

$r = 5\%$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{\frac{1}{2}\cdot 0.05} - 0.8}{1.20 - 0.80} = 0.5632878 \qquad 1 - p = 0.436712$$

$e^{r\Delta t} = 1.025315$ $e^{-r\Delta t} = 0.975309$

Procediamo a ritroso sull'albero:

$f_{uu} = e^{-r\Delta t}\{ f_{uuu}\,p + f_{uud}\,(1-p)\} = 0$ $f_{ud} = e^{-r\Delta t}\{ f_{uud}\,p + f_{udd}\,(1-p)\} = 9.881556$

$f_{dd} = e^{-r\Delta t}\{ f_{udd}\,p + f_{ddd}\,(1-p)\} = 33.63$

$f_u = 4.2$ $f_d = 19.71$, $f_0 = 10.70\,\$$

b) Parità put-call $\quad S_0 + P_0 = C_0 + Ke^{-rT} \Rightarrow C_0 = S_0 + P_0 - Ke^{-rT}$

$$= 100 + 10.70 - 100\, e^{-0.05 \cdot 18/12}$$

$$= 17.93\,\$$$

c) Strategia di copertura

$\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1), (\Delta_2, B_2)\}$

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = \frac{4.2 - 19.71}{120 - 80} = -0.38775$$

L'investitore deve vendere allo scoperto 38.775 azioni, nel portafoglio detiene la somma

$$100 \cdot f_0 + 38.775 \cdot S_0 = 4'947.5\,€$$

Dopo 6 mesi in caso di rialzo $S_1 = S_u$

$$\Delta_{1,u} = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = \frac{-9.881656}{144 - 96} = -0.20588$$

L'investitore acquista: $30.775 - 20.586 = 18.189$, azioni, nel portafoglio detiene la somma

$$4'947.56\, e^{r\Delta t} - 18.189 \cdot S_1 = 2'890.06\,€$$

Dopo altri 6 mesi, ossia al tempo 1 anno in caso di ulteriore rialzo, $S_2 = S_{uu}$

$$\Delta_{2,uu} = \frac{f_{uuu} - f_{udu}}{S_{uuu} - S_{udd}} = 0$$

Acquista 20.586 azioni e chiude la posizione allo scoperto, nel portafoglio ha:

$$2'890.08\, e^{r\Delta t} - 20.586 \cdot S_{uu} \approx 0\,€$$

La copertura è verificata perché il valore del derivato $f_{uuu} = f_{uud} = 0$.

3) $\mu = 10\%$ $\quad \sigma = 50\%$ $\quad r = 1\%$ $\quad T = 12$ mesi $\qquad F(S_T) = \frac{1}{S_T} = (S_T)^{-1}$

Secondo la valutazione neutrale al rischio $\quad V_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_T)] = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T)^{-1}]$

$\mathbb{Q}$ misura neutrale al rischio, rispetto a $\mathbb{Q}$

$$S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}} \qquad \{W_t^{\mathbb{Q}}\}_{t\geq 0} \text{ moto browniano}$$

$$V_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_0^{-1} e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})T} e^{-\sigma W_T^{\mathbb{Q}}}] = \frac{e^{-2rT}}{S_0} e^{\frac{\sigma^2}{2}T} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\sigma W_T^{\mathbb{Q}}}]}_{=}$$

$$\mathbb{E}[e^{-\sigma\sqrt{T}N}] = e^{\sigma^2 T/2}$$

in quanto $W_T^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0,T)$

$W_T^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T}N \qquad N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{E}[e^{\sigma N}] = e^{\sigma^2/2}$

$$V_0 = \frac{1}{S_0} e^{-2rT} e^{\sigma^2 T} = \frac{1}{10} e^{-2\cdot 0.01} e^{0.50^2} = 0.126 \text{ €}$$

b) $v(t,x) = e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T)^{-1} \mid S_t = x]$

tenendo conto che $\quad S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})} \quad$ e $\quad W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$

si ottiene che

$$v(t,x) = \frac{1}{x} e^{-2r(T-t)} e^{\sigma^2(T-t)}$$

c) $\delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)} \qquad \delta(0,S_0) = -\frac{1}{10^2} e^{(-2\cdot 0.01 + 0.5^2)\cdot 1} = -0.01258$

L'investitore deve vendere allo scoperto 12.58 azioni

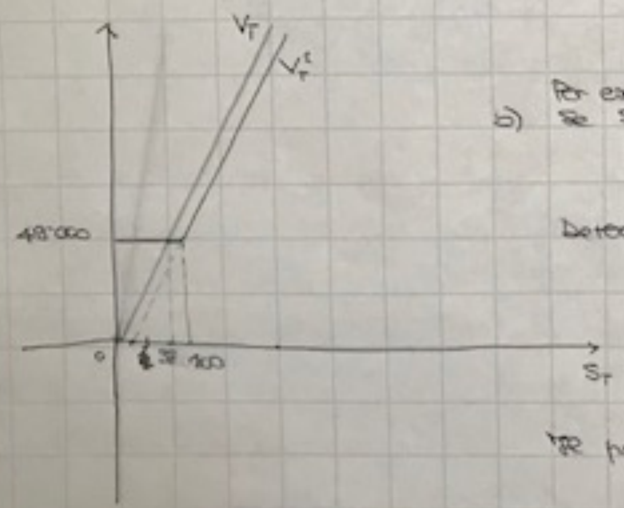
f) 500 azioni Amazon

Valore del portafoglio senza la copertura $V_T = 500 \cdot S_T$

Copertura con le put: acquistiamo 500 put per vendere le azioni (se il prezzo scenderà sotto $K = 100\$$) tra 1 anno

Valore del portafoglio $V_T^1 = 500 \cdot S_T + 500 \cdot (100 - S_T)_+ - 500 \cdot p$

$$V_T^1 = \begin{cases} 500 \cdot S_T + 500(100 - S_T) - 500p = 500(100 - p) = 500 \cdot 98 = 49'000\$ & \text{eserciterò la put se } S_T \leq 100 \\ 500 \cdot S_T - 500 \cdot p = 500(S_T - 2) = 500S_T - 1'000 & \text{se } S_T > 100 \text{ non eserciterò la put} \end{cases}$$



b) Per esempio se $S_T = 90\$$ senza la copertura $V_T = 500 \cdot 90 = 45'000\$$

con la copertura $V_T^1 = 49'000\$$

Determiniamo il punto d'intersezione tra V_T e V_T^1:

$500 \cdot S_T = 49'000 \qquad S_T = \frac{49'000}{500} = 98\$$

$V_T \leq V_T^1 \iff S_T \leq 98\$$

Il portafoglio di copertura è vantaggioso per $S_T \leq 98\$$