Scritto del 25/09/20

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (6 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Sia la probabilitá di default $q = Q(\tau \leq T) = 0,15$ con $T = 1$ anno e il prezzo oggi di uno ZCB privo di rischio di maturitá $T = 1$ e valore nominale 100 euro anno pari a 95 euro.
a) Calcolare il prezzo oggi di DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 30\%$, di valore nominale 100 euro e maturitá T.
b) Calcolare il prezzo oggi di un DZCB con recovery nullo e valore nominale 100$ e maturitá $T = 2$ anni.

2. (9 punti)
Il prezzo di un'azione é di 50$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi semestri il prezzo salga del 10% o scenda del 15%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 5%.
a) Qual'é il valore di una put europea con prezzo d'esercizio $k = 40\$$ e scadenza 12 mesi?
b) Qual'é il valore della call europea corrispondente?
c) Determinare il valore della put americana corrispondente. É ottimale l'esercizio anticipato?

3. (12 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 10% e una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse privo di rischio é del 5% annuo. Oggi il prezzo dell'azione é di 50$.
a) Calcolare la probabilitá che tra un anno il prezzo dell'azione sia superiore a 40$.
Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza un anno di payoff finale

$$F(S_T) = (S_T)^{\frac{1}{4}}$$

dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
b) il prezzo v_0 del derivato oggi;
c) il prezzo $v(t, x)$ del derivato al tempo t se $S_t = x$;
d) L'istituzione finanziaria ha venduto 1.000 derivati, quante azioni deve avere nel portafoglio di copertura al tempo $t = 2$ mesi se il prezzo dell'azione al tempo $t = 2$ mesi é pari a $S_t = 55\$$?

4.(6 punti)
Il prezzo di un'azione oggi é di 50$ e paga una cedola semestrale di 10$. Il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente é del 2%?
a) Qual'é il prezzo teorico future a 24 mesi?
b) Dopo 12 mesi il prezzo dell'azione é salito a 55$. Qual'é in quel momento il valore unitario del contratto future per la posizione lunga?

Scritto del 25/09/2020 di Titoli derivati e Gestione del Rischio

1.)

$Q(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ $\qquad Q(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \forall\, t \geq 0$

$q = Q(\tau \leq T) = 0.15 \qquad T = 1$ anno

valore del risk free default ZCB è pari a $P_0 = 100\, e^{-rT} = 95$ €

$T = 1$ anno

$1 - \delta = 30\%$

a) $P_{RT}(0,T) = e^{rT}\, \mathbb{E}^Q\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + 100(1-\delta)\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}\right] =$

$= e^{-rT} \cdot 100 \left\{ Q(\tau > T) + 0.30\, Q(\tau \leq T) \right\} =$

$= 95 \left\{ (1-q) + 0.30\, q \right\} = 95 \left\{ 1 - 0.7\, q \right\} = 85.025$ €

b) $P_1(0,2) = e^{-2r}\, \mathbb{E}^Q\left[100\, \mathbb{1}_{\{\tau > 2\}}\right] = 100\, e^{-2r}\, Q(\tau > 2) = 100\, e^{-2r}\, e^{-2\lambda} = 100\, e^{-2(r+\lambda)}$

ricaviamo r e λ : $\quad 100\, e^{-r} = 95 \Rightarrow e^{-r} = \frac{95}{100} \Rightarrow r = -\ln\left(\frac{95}{100}\right) = \ln\left(\frac{100}{95}\right) =$

$= 0.051 \simeq 5.1\%$

$0.15 = Q(\tau \leq 1) = 1 - e^{-\lambda}$

$e^{-\lambda} = 0.85 \Rightarrow \lambda = -\ln(0.85) = 0.163 \simeq 16.3\%$

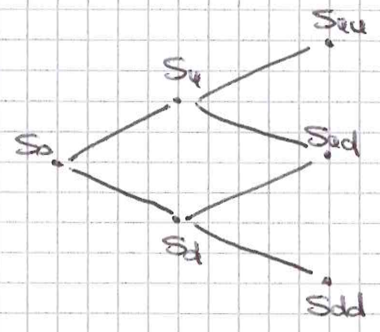
$P_1(0,2) = 100\, e^{-2(0.051 + 0.163)} = 100\, e^{-0.428} = 65.18$ €

a) $S_0 = 50\ \$$ 2 semestri sale 10% scende del 15% $r = 5\%$ $\Delta t = \frac{1}{2}$ anno

$S_u = 50 + 0.10 \cdot 50 = 1.1 \cdot 50 = 55\ \$$ $u = 1.1$

$S_d = 50 - 0.15 \cdot 50 = 0.85 \cdot 50 = 42.50\ \$$ $d = 0.85$

$S_{uu} = u \cdot S_u = 60.5\ \$$ $S_{ud} = d\, S_u = 46.75\ \$$ $S_{dd} = 36.125\ \$$



$f_{uu} = (40 - S_{uu})_+ = 0$

$f_{ud} = (40 - S_{ud})_+ = 0$

$f_{dd} = (40 - S_{dd})_+ = 3.875\ \$$

put europea $K = 40\ \$$
$T = 1$ anno

payoff $(K - S_T)_+ = \max\{K - S_T, 0\}$

$T = 1$ anno

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.05 \cdot \frac{1}{2}} - 0.85}{1.1 - 0.85} = 0.70126 \qquad 1 - p = 0.29874 \qquad e^{-r\Delta t} = 0.9753$$

Procediamo a ritroso sull'albero:

$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p)\} = 0$ $f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{ud}\, p + f_{dd}(1-p)\} = e^{-r\Delta t} \cdot 3.875\,(1-p) =$
$= 1.129$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u\, p + f_d(1-p)\} = 0.328954\ \$$

b) Put-call parity $p_0 + S_0 = c_0 + K e^{-rT}$ $\Rightarrow$ $c_0 = p_0 + S_0 - K e^{-rT} =$
$= 0.329 + 50 - 40\, e^{-0.05} = 12.28\ \$$

c) Put americana

$$f_u^* = \max\{\underset{\text{valore all'esercizio}}{(K - S_u)_+},\ f_u\} = \max\{(40-55)_+,\ f_u\} = f_u$$ non è ottimale l'esercizio anticipato

$f_d^* = \max\{(K-S_d)_+, f_d\} = \max\{(40-42.50)_+, f_d\} = f_d$ non è ottimale l'esercizio anticipato

$f_0^* = \max\{(K-S_0)_+, f_0\} = \max\{(40-50)_+, f_0\} = f_0$ non è ottimale l'esercizio anticipato

$f_0^* = f_0$ la put americana ha lo stesso valore della put europea perché non è mai conveniente l'esercizio anticipato

3) $\mu = 10\%$ $\sigma = 20\%$ $r = 5\%$ $S_0 = 50\$$

$S_T = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T}$

$\{W_t\}_{t\geq 0}$ moto browniano

$P(S_T \geq 40) =$ $T = 1$ anno

$W_T \sim \mathcal{N}(0,T)$ $W_T \sim \sqrt{T}N$ $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$P(S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} \geq 40) = P(e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T} \geq \frac{40}{50}) =$

$P((\mu-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T \geq \ln(\frac{40}{50})) = P(\sigma\sqrt{T}N \geq \ln(\frac{40}{50}) - (\mu-\frac{\sigma^2}{2})T) =$

$= P\left(N \geq \frac{\ln(40/50) - (\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(40/50) - (\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = 1 - \Phi(-1.416) = \Phi(1.416)$

b) Q misura neutrale al rischio

$S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q}$ $\{W_t^Q\}_{t\geq 0}$ moto browniano rispetto a Q

$v_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^Q[(S_T)^{1/4}] = e^{-rT}\mathbb{E}^Q[S_0^{1/4} e^{\frac{1}{4}(r-\frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{1}{4}\sigma W_T^Q}] =$

$= S_0^{1/4} e^{-\frac{3}{4}rT} e^{-\frac{1}{8}\sigma^2 T} \underbrace{\mathbb{E}^Q[e^{\frac{1}{4}\sigma\sqrt{T}N}]}_{e^{\frac{\frac{1}{16}\sigma^2 T}{2}} = e^{\frac{1}{32}\sigma^2 T}}$ $\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$v_0 = S_0^{1/4}\, e^{-\frac{3}{4} r T}\, e^{-\frac{3}{32}\sigma^2 T} \approx 2.55\,\$$

-0.03

c) $v(t,x) = e^{-r(T-t)}\, E^Q\left[(S_T)^{1/4} \mid S_t = x \right] =$ $\qquad S_T = S_t\, e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$

$x^{1/4}\, e^{-\frac{3}{4} r (T-t)}\, e^{-\frac{3}{32}\sigma^2 (T-t)}$

d) Il delta del portafoglio di copertura $\delta(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1}\, e^{-\frac{3}{4} r (T-t)}\, e^{-\frac{3}{32}\sigma^2 (T-t)}$

$\delta(t,x) = \frac{1}{4} x^{-3/4}\, e^{-\left(\frac{3}{32}\sigma^2 + \frac{3}{4} r\right)(T-t)} = \frac{1}{4} (55)^{-3/4}\, e^{-\left(\frac{3}{32} 0.2^2 + \frac{3}{4} 0.5\right) 10/12} = 0.011981$

L'istituzione dopo 2 mesi deve detenere 11.98 azioni

4) $S_0 = 50\,\$$ $\quad T = 2$ anni $\quad$ cedola semestrale $= 10\,\$$ $\quad r = 2\%$

a) $F_0 = (S_0 - I)\, e^{rT}$ $\qquad I$ valore attuale cedole pagate in $[0,T]$ $\qquad$ 10 10 10 10

$I = 10\left(e^{-r/2} + e^{-r} + e^{-\frac{3}{2} r} + e^{-2r}\right) = 10\left(e^{-0.01} + e^{-0.02} + e^{-0.03} + e^{-0.04}\right) = 39\,\$$

0.99 $\quad$ 0.98 $\quad$ 0.97 $\quad$ 0.96

$F_0 = (50 - 39)\, e^{0.04} = 11.45\,\$$

b) $S_t = 55\,\$$ $\quad t = 1$ anno $\quad T - t = 1$ anno

il valore del contratto della posizione lunga è $\quad f_t = (F_t - F_0)\, e^{-r(T-t)} = (36.32 - 11.45)\, e^{-0.02} = 24.38$

24.87

$F_t = (S_t - I_t)\, e^{r(T-t)}$ $\qquad I_t$ valore al tempo t delle cedole pagate in $[t,T]$

$I_t = 10\left(e^{-0.02/2} + e^{-0.02}\right) = 19.4$ $\qquad F_t = (55 - 19.4)\, e^{0.02} = 36.32\,\$$

prezzo futures al tempo $t = 1$ anno