Scritto del 04/02/20 04/02/2021

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (6 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria A di distribuzione esponenziale $\lambda > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

a) Determinare il prezzo $p(0,T)$ di un DZCB senza recovery di valore nominale x e maturitá T.

b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturitá $T = 1$ anni, pari a $p_0 = 95$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturitá pari a $p = 90$ euro. Determinare l'intensitá di default λ dell'istituzione finanziaria e la probabilitá di default entro un anno dell'istituzione A.

c) Lo spread tra l'istituzione B e l'istituzione A (presa da riferimento) é pari al 10%. Determinare la probabilitá di default entro un anno dell'istituzione B, e confrontarla con quella di A.

2. (12 punti)

Il prezzo di un'azione é di 50$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi semestri il prezzo salga del 7% o scenda del 7%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente e' dell'2%.

a) Qual'é il valore di un derivato di payoff finale $F(S_T) = (S_T - 50)^2$ e scadenza 12 mesi?

b) Un investitore ha venduto 100 derivati. Quale strategia di copertura deve mettere? (Verificare la copertura)

in atto

3. (11 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha una volatilitá (annua) pari al 10%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá un derivato, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale $F(S_T) = (S_T - 50)^2$ e dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 50$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:

a) il prezzo v_0 del derivato oggi;

b) il prezzo del derivato $v(t,x)$ al tempo t se $S_t = x$;

c) L'istituzione finanziaria ha venduto 10 derivati, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(4 punti)

Scrivere e dimostrare la relazione di paritá put-call nel caso in cui l'azione non paghi dividendi.

Titoli Derivati e Gestione del Rischio I 04/02/2021

1) $Q(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$

a) $p(0,T) = e^{-rT} x \, \mathbb{E}^{Q}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}}] = e^{-rT} x \, e^{-\lambda T} = x \, e^{-(r+\lambda)T} = P_0 \, e^{-\lambda T}$

b) $P_0 = 95 €$ $\quad p = 90 € = 95 \, e^{-\lambda T}$

$e^{-\lambda T} = \frac{90}{95}$ $\quad \lambda = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{90}{95}\right) = \ln\left(\frac{95}{90}\right) = 0.054$ $\quad Q(\tau_A \leq 1) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - \frac{90}{95} = \frac{5}{95} = 0.052$

c) spread = 10% $\quad P_B = P_0 \, e^{-\lambda_B T}$ $\quad \frac{P_B}{P_A} = \frac{P_0 e^{-\lambda_B T}}{P_0 e^{-\lambda T}} = e^{-(\lambda_B - \lambda)T}$

$10\% = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right) = \lambda_B - \lambda$

$\Rightarrow \quad \lambda_B = \lambda + 0.1 = 0.154$

$Q(\tau_B > 1) = e^{-\lambda_B} = e^{-0.154} = 0.857$ $\quad Q(\tau_B \leq 1) = 1 - 0.857 = 0.143$

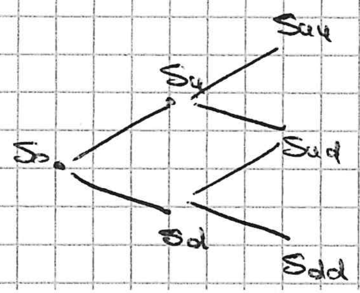
$Q(\tau_B \leq 1) = 14.3\% > Q(\tau_A \leq 1) = 5.2\%$

2) $S_0 = 50 \$$ sale del 7% e scende del 7% alla fine di ogni semestre

$S_u = S_0 + 0.07 S_0 = 1.07 \cdot 50 = 53.5$ $\quad u = 1.07$ $\quad S_{uu} = 57.245$

$S_d = S_0 - 0.07 S_0 = 0.93 \cdot 50 = 46.5$ $\quad d = 0.93$ $\quad S_{ud} = 49.755$

$S_{dd} = 43.245$



$F(S_{uu}) = (S_{uu} - 50)^2 = 52.49$

$F(S_{ud}) = (S_{ud} - 50)^2 = 0.06$

$F(S_{dd}) = (S_{dd} - 50)^2 = 45.63$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.02 \cdot \frac{1}{2}} - 0.93}{1.07 - 0.93} = 0.572$$

Procediamo a ritroso sull'albero:

$$f_u = e^{-r\Delta t}\{ f_{uu} p + f_{ud}(1-p)\} = 29.75 \$ \qquad f_d = e^{-r\Delta t}\{ f_{ud} p + f_{dd}(1-p)\} = 19.37 \$$$

$$f_0 = e^{-r\Delta t}\{ f_u p + f_d (1-p)\} = 25.06 \$$$

b) L'investitore ha venduto 100 derivati deve mettere in atto la seguente strategia di copertura:

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 1.48$$

al tempo $t=0$ deve acquistare 148 azioni, nel portafoglio ha in prestito

$$148 \cdot S_0 - 100 \cdot f_0 = 4'894 \$$$

Dopo 6 mesi

$$\Delta_1 = \begin{cases} \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 7 & \text{se } S_1 = S_u \\[2ex] \dfrac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = -7 & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

In caso di rialzo ($S_1 = S_u$) deve acquistare $700 - 148 = 552$ azioni, in prestito ha

$$4894\, e^{r\Delta t} + 552 \cdot S_u = 34'475.186 \$$$

(di cui 700 allo scoperto)

In caso di ribasso ($S_1 = S_d$) deve vendere $700 + 148 = 848$ azioni, nel portafoglio

detiene la somma:

$$848 \cdot S_d - 4'894\, e^{r\Delta t} = 34'488.814 \$$$

Qui richiamo la copertura:

al tempo $T = 1$ anno se $S_1 = S_u$ restituisce il prestito e vende le azioni (7'00)

$$7'00\, S_T - 34'475.2e^{r\Delta t} = \begin{cases} 7'00\, S_{uu} - 34'475.2e^{r\Delta t} = 5'249.8 \simeq 100\, f_{uu} \\ 7'00\, S_{ud} - 34'475.2e^{r\Delta t} = 6.83 \simeq 100\, f_{ud} \end{cases}$$

al tempo $T = 1$ anno se $S_1 = S_d$ acquista 7'00 azioni chiudendo la posizione allo scoperto

$$34'488.8e^{r\Delta t} - 7'00\, S_T = \begin{cases} 34'488.8e^{r\Delta t} - 7'00\, S_{ud} = 6.93 \sim 100\, f_{ud} \\ 34'488.8e^{r\Delta t} - 7'00\, S_{dd} = 4563.9 \sim 100\, f_{dd} \end{cases}$$

3) $\sigma = 10\%$ $\quad r = 2\%$ $\quad T = 12$ mesi $\quad F(S_T) = (S_T - 50)^2$

$$Y_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^Q[(S_T - 50)^2] = e^{-rT}\, \mathbb{E}^Q[S_T^2 + 2'500 - 100\, S_T] = \qquad S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q}$$

$$= e^{-rT}\left\{ S_0^2\, e^{2(r - \frac{\sigma^2}{2})T} \underbrace{\mathbb{E}^Q[e^{2\sigma W_T^Q}]}_{= \mathbb{E}[e^{2\sigma\sqrt{T} N}] = e^{\frac{4\sigma^2}{2}T}} + 2'500 - 100\, \underbrace{\mathbb{E}^Q[S_T]}_{= S_0 e^{rT}} \right\}$$

$W_T^Q \sim \mathcal{N}(0, T)$

$W_T^Q \sim \sqrt{T}\, N \qquad N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{a^2/2}$

$$Y_0 = S_0^2\, e^{rT}\, e^{-\sigma^2 T}\, e^{2\sigma^2 T} + 2'500\, e^{-rT} - 100\, S_0 =$$

$$= 50^2\, e^{(r + \sigma^2)T} + 2'500\, e^{-rT} - 100 \cdot 50 = 26.63\ \$$$

$$= 2500\, e^{(0.02 + 0.1^2)} + 2500\, e^{-0.02} - 5000 = 26.63\ \$$$

$$V(t,x) = e^{-r(T-t)} E^Q\left[(S_T - 50)^2 \mid S_t = x \right] = \qquad S_T = S_t\, e^{(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$$

$$= x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + 2'500\, e^{-r(T-t)} - 100x$$

c) $\Delta(t,x) = \dfrac{\partial V}{\partial x} = 2x\, e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 100$

0.03

$$\Delta(0, S_0) = 2 \cdot S_0\, e^{(r+\sigma^2)T} - 100 = 100\, e^{(0.02 + 0.10^2)} - 100 = 3.0454$$

Deve acquistare 3'045.4 azioni

4) Relazione di parità put-call : $\quad P_0 + S_0 = C_0 + K e^{-rT}$

Consideriamo due portafogli :

P_A: 1 call + somma $K e^{-rT}$

P_B: 1 put + 1 azione $\qquad$ Calcoliamo il loro valore finale

$$V_T(P_A) = (S_T - K)_+ + K = \begin{cases} S_T - K + K = S_T & \text{se } S_T > K \\ \text{(la call viene esercitata)} & \\ K & \text{se } S_T \le K \end{cases} \qquad V_T(P_A) = \max(S_T, K)$$

$$V_T(P_B) = (K - S_T)_+ + S_T = \begin{cases} K - S_T + S_T & \text{se } S_T < K \\ \text{(la put viene esercitata)} & \\ S_T & \text{se } S_T \ge K \end{cases} \qquad V_T(P_B) = \max(S_T, K)$$

In assenza di opportunità di arbitraggio $\Rightarrow \quad V_0(P_A) = V_0(P_B)$