Scritto del 24/02/21
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I
Prof.ssa Claudia Ceci

1. (6 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ_A il tempo di default dell'istituzione finanziaria A. Sia $q_A = Q(\tau_A \leq T) = 0,2$ e $r = 3\%$ il tasso d'interesse composto continuamente.
a) Determinare il prezzo $p_A(0,T)$ di un DZCB con recovery alla scadenza pari al 30% di valore nominale 100 euro e maturitá $T = 1$ anno emesso da A.
b) Il prezzo $p_B(0,T)$ di un analogo DZCB emesso dall'istituzione B é pari a 80 euro. Determinare la la probabilitá di default q_B di B. Quale dei due DZCB é piú rischioso?

2. (12 punti)
Il prezzo di un'azione é di 20\$. Ci si attende che in ciascuno dei tre prossimi quadrimestri il prezzo salga del 20% o scenda del 20%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é dell'5%.
a) Qual'é il valore di una call europea con prezzo di esercizio 20\$ e scadenza 12 mesi?
b) Qual'é il valore della corrispondente put europea?
b) Un investitore ha venduto 1000 call. Quale strategia di copertura deve mettere in atto se si ha un rialzo alla fine del primo quadrimestre ed un ribasso alla fine del secondo quadrimestre? (Verificare la copertura)

3. (13 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá due derivati, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale $F_1(S_T) = \frac{1}{100}S_T^2$ e $F_2(S_T) = \frac{1}{100}S_T^3$ dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 30\$. Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
a) il prezzo v_0^1 e v_0^2 dei due derivati oggi;
b) il prezzo dei derivati $v^1(t,x)$ e $v^2(t,x)$ al tempo t se $S_t = x$;
c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1000 derivati di del primo tipo e acquistato 10 derivati del secondo tipo, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(5 punti)
Determinare e disegnare il grafico del payoff finale, in funzione del prezzo dell'azione al tempo T, S_T, di uno spread a farfalla ottenuto acquistando 2 call con prezzo d'esercizio $k_1 = 20\$$ e $k_3 = 25\$$ e maturitá T e vendendo 2 call con prezzo d'esercizio $k_2 = 22.5\$$ e stessa maturitá. I prezzi delle call sono $c_1 = 4\$$, $c_2 = 2\$$ e $c_3 = 0.5\$$ Per quali valori di S_T il payoff é positivo?

26

Titoli Derivati e Gestione del Rischio I — Prof. C. Ceci

SCRITTO DEL 24/02/2021

1) $q = \mathbb{Q}(\tau_A \leq T) = 0.2 \qquad r = 3\% \qquad 1-\delta = 0.3 \qquad \delta = 0.7$

a) $P_A(0,T) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[100\,\mathbb{1}_{\{\tau_A > T\}} + 30\,\mathbb{1}_{\{\tau_A \leq T\}}\right] =$

$= e^{-rT}\{100\,\underbrace{\mathbb{Q}(\tau_A > T)}_{1-q_A} + 30\,\underset{q_A}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{Q}(\tau_A \leq T)}}\} = e^{-rT}\{100 - 70\,q_A\} = e^{-0.03}\{100 - 70 \cdot 0.2\}$

$= 83.46$ €

b) $P_B(0,T) = 80$ € $< P_A(0,T)$ il DZCB emesso da B è più rischioso di quello di A in quanto ha un rendimento maggiore, a parità di rimborso alla scadenza costa di meno

Dalla relazione $P_B(0,T) = \underbrace{x\,e^{-rT}}_{P_0(0,T)}\{1 - \delta q_B\}$ siamo in grado di determinare $q_B = \mathbb{Q}(\tau_B \leq T)$ che è la probabilità di fallimento entro un 1 anno dell'istituzione B

$P_0(0,T) = 100\,e^{-0.03} = 97$ €

$\Rightarrow \dfrac{P_B(0,T)}{P_0(0,T)} = 1 - \delta q_B \Rightarrow q_B = \dfrac{1}{\delta}\left(1 - \dfrac{P_B(0,T)}{P_0(0,T)}\right) = \dfrac{1}{0.7}\left(1 - \dfrac{80}{97}\right) = 0.25$

$q_B = 0.25 > 0.20 = q_A$ la probabilità di default di B è maggiore rispetto a quella di A

$\Downarrow$

il DZCB emesso da B è più rischioso rispetto al DZCB emesso da A

2) $S_0 = 20\,\$$ 3 quadrimestri $\Delta t = \frac{4}{12}$ anno $= \frac{1}{3}$ anno call $F(S_T) = (S_T - 20)_+$

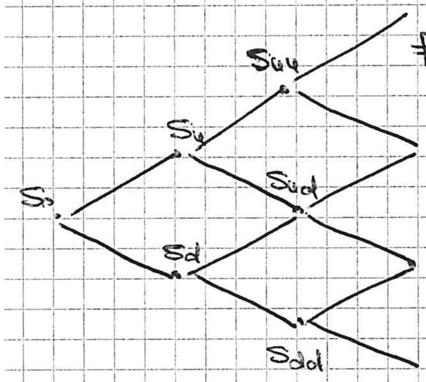
$r = 5\%$ $u = 1.20$ $d = 0.80$ $T = 1$ anno

$S_u = 20 + 20 \cdot 0.2 = 24\,\$$ $S_{uu} = 28.8\,\$$ $S_{uuu} = 34.56\,\$$

$S_d = 20 - 20 \cdot 0.2 = 16\,\$$ $S_{ud} = 19.2\,\$$ $S_{uud} = 23.04\,\$$

$S_{dd} = 12.8\,\$$ $S_{udd} = 15.36\,\$$

$S_{ddd} = 10.24\,\$$



S_{uuu}

$f_{uuu} = (S_{uuu} - 20)_+ = 14.56\,\$$

S_{uud}

$f_{uud} = (S_{uud} - 20)_+ = 3.04\,\$$

S_{udd}

$f_{udd} = 0$

S_{ddd}

$f_{ddd} = 0$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.05 \cdot \frac{1}{3}} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.54203$$

$1 - p = 0.45797$

Procediamo a ritroso sull'albero

$f_{uu} = e^{-r\Delta t}\{f_{uuu}\,p + f_{uud}(1-p)\} = 9.13072$

$f_{ud} = e^{-r\Delta t}\{f_{uud}\,p + f_{udd}(1-p)\} = 1.62053$

$f_{dd} = 0$

$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}\,p + f_{ud}(1-p)\} = 5.59772$

$f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{ud}\,p + f_{dd}(1-p)\} = 0.86386$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u\,p + f_d(1-p)\} = 3.37278\,\$$

b) Relazione di parità put-call : $c + K e^{-rT} = p + S_0$

$\Rightarrow p = c + K e^{-rT} - S_0 = 3.37278 + 20\,e^{-0.05} - 20 = 2.39737\,\$$

c) Un investitore ha venduto 1000 Call

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 0.59167$$

Al tempo $t=0$ l'investitore deve acquistare 591.67 azioni, in prestito nel portafoglio ha:

$$591.67 \cdot S_0 - 1'000\, f_0 = 8'460.62 \,\$$$

Dopo 4 mesi in caso di rialzo $S_1 = S_u$

$$\Delta_{1,u} = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 0.78231$$

l'investitore deve acquistare altre $782.31 - 591.67 = 190.64$ azioni

in prestito nel portafoglio ha $8'460.62\, e^{r\Delta t} + 190.64 \cdot S_u = 13'178.2 \,\$$

Dopo 8 mesi in caso di ribasso $S_2 = S_{ud}$

$$\Delta_{2,ud} = \frac{f_{uud} - f_{udd}}{S_{uud} - S_{udd}} = 0.39583$$

l'investitore deve vendere $782.51 - 395.83 = 386.48$ azioni, in prestito nel portafoglio ha

$$13'178.2\, e^{r\Delta t} - 386.48 \cdot S_{ud} = 5'979.30651 \,\$$$

Vediamo chi ha la copertura, al tempo T, vende le 395.83 azioni e restituisce il prestito, nel portafoglio ha

$$395.83\, S_T - 5'979.30651\, e^{r\Delta t} = \begin{cases} 3'040.106 \simeq 1'000\, f_{uud} & \text{se } S_T = S_{uud} \\ 0.1318 \simeq 1'000\, f_{udd} = 0 & \text{se } S_T = S_{udd} \end{cases}$$

3

3) $\sigma = 20\%$ $\quad r = 2\%$ $\quad T = 1$ anno $\quad S_0 = 30\$$

$$F_1(S_T) = \frac{1}{100} S_T^2 \qquad F_2(S_T) = \frac{1}{100} S_T^3$$

a) $V_0^i = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F_i(S_T)]$ $\qquad S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}}$ $\qquad \{W_t^{\mathbb{Q}}\}_{t\in[0,T]}$ moto browniano rispetto a $\mathbb{Q}$

$$V_0^1 = \frac{1}{100} e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_0^2 e^{2(r-\frac{\sigma^2}{2})T + 2\sigma W_T^{\mathbb{Q}}} \right] = \frac{30^2}{100} e^{-rT} e^{2(r-\frac{\sigma^2}{2})T} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2\sigma\sqrt{T} N} \right]}_{= e^{\frac{4}{2}\sigma^2 T} = e^{2\sigma^2 T}}$$

$W_T^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0,T)$

$W_T^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T} N$

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{E}(e^{aN}) = e^{\frac{a^2}{2}}$

$$V_0^1 = \frac{S_0^2}{100} e^{(r+\sigma^2)T} = 9.56\$$$

$$V_0^2 = \frac{1}{100} e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_0^3 e^{3(r-\frac{\sigma^2}{2})T + 3\sigma W_T^{\mathbb{Q}}} \right] = \frac{S_0^3}{100} e^{-rT} e^{3(r-\frac{\sigma^2}{2})T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{3\sigma\sqrt{T} N} \right]$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{3\sigma\sqrt{T} N} \right] = e^{\frac{9\sigma^2 T}{2}}$$

$$V_0^2 = \frac{S_0^3}{100} e^{(2r+3\sigma^2)T} = 316.85\$$$

b) $V^i(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F_i(S_T) \mid S_t = x]$ $\qquad$ tenendo conto che $S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}$

e che $W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \sim \sqrt{T-t}\, N$

$$\Rightarrow V^1(t,x) = \frac{x^2}{100} e^{(r+\sigma^2)(T-t)} \qquad \frac{\partial V^1}{\partial x} = \frac{2x}{100} e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

$$V^2(t,x) = \frac{x^3}{100} e^{(2r+3\sigma^2)(T-t)} \qquad \frac{\partial V^2}{\partial x} = \frac{3x^2}{100} e^{(2r+3\sigma^2)(T-t)}$$

Corto sul derivato di pay off F_1 deve acquistare $\quad \delta^1(0,S_0) = \frac{2 \cdot S_0}{100} e^{(r+\sigma^2)T} = 0.637$

Lungo sul derivato " F_2 deve vendere $\quad \delta^2(0,S_0) = \frac{3 \cdot S_0^2}{100} e^{(2r+3\sigma^2)T} = 31.685$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{deve acquistare } 637 \text{ azioni} \\ \text{deve vendere } 316.85 \text{ azioni} \end{cases} \Rightarrow$ acquistare $637 - 316.85 = 320$ azioni

4) 2 call lunghe $K_1 = 20\$$ $K_3 = 25\$$

2 call corte $K_2 = 22.5\$$

Payoff complessivo:

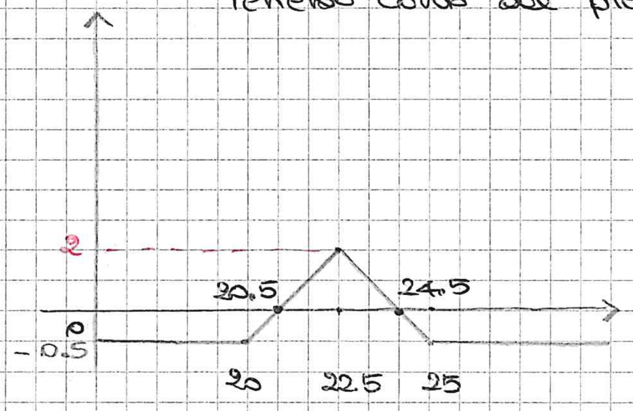
$$V_T = (S_T - K_1)_+ + (S_T - K_3)_+ - 2(S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0 & \text{se } S_T \le K_1 \\ S_T - K_1 & \text{se } K_1 < S_T \le K_2 \\ S_T - K_1 - 2(S_T - K_2) = 2K_2 - K_1 - S_T & \text{se } K_2 < S_T \le K_3 \\ S_T - K_1 + S_T - K_3 - 2S_T + 2K_2 = \\ \quad = 2K_2 - K_1 - K_3 = 0 & \text{se } K_3 < S_T \end{cases}$$

$$V_T = \begin{cases} 0 & S_T \le 20 \\ S_T - 20 & 20 < S_T \le 22.5 \\ 25 - S_T & 22.5 < S_T \le 25 \\ 0 & 25 < S_T \end{cases}$$

Tenendo conto del premio iniziale

$C_1 + C_3 - 2C_2 = 0.5\$$

$V_T - 0.5$



Il payoff è positivo se $V_T - 0.5 > 0$

se $20.5 < S_T < 24.5$

$S_T - 20 - 0.5 = S_T - 20.5 > 0 \Leftrightarrow S_T > 20.5$

$25 - S_T - 0.5 = 24.5 - S_T > 0 \Leftrightarrow S_T < 24.5$