Scritto del 02/07/21
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I
Prof.ssa Claudia Ceci

1. (6 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente. Il valore di mercato al $t = 0$ mesi di un free-defaultable ZCB di maturitá $T = 12$ mesi e valore nominale 100 euro é pari a 97 euro.
(i) Sia $p_{RT}(0, T)$ il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB di maturitá $T = 12$ mesi e di valore nominale 100 euro e recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 0,60$ é pari a 90 euro. Determinare l'intensitá di default λ^Q dell'istituzione finanziaria.
(ii) Sia $\bar{p}_{RT}(0, T)$ il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB analogo al punto (i) (stesso valore nominale, recovery e maturitá) emesso da un'altra istituzione finanziaria pari a 87 euro. Quale delle due istituzioni ha un rischio di default maggiore? Determinare il loro spread creditizio.

2. (11 punti)
Il prezzo di un'azione é di 45\$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi bimestri il prezzo salga del 5% o scenda del 4%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente é del 4%.
a) Qual'é il valore di una put europea con prezzo di esercizio 46\$ e scadenza 4 mesi?
b) Qual'é il valore della corrispondente put americana?
b) Un investitore ha venduto 1000 put. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare la copertura)

3. (12 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá due derivati, con scadenza $T = 12$ mesi, di pay-off finale $F_1(S_T) = \frac{1}{100}(S_T)^2$ e $F_2(S_T) = \frac{1}{10.000}(S_T)^4$ dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T. Oggi il prezzo dell'azione é di 30\$.
Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:
a) il prezzo v_0^1 e v_0^2 dei due derivati oggi;
b) il prezzo dei derivati $v^1(t, x)$ e $v^2(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;
c) L'istituzione finanziaria ha venduto 100 derivati di del primo tipo e acquistato 100 derivato del secondo tipo, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4.(4 punti)
Scrivere e dimostrare la relazione di paritá put-call in presenza di dividendi.

Scritto del 02/07/2021 Titoli Derivati e Gestione del Rischio I

1) $P_0 = 100 e^{-rT} = 97€$ prezzo ZCB free-default

$\tau \sim exp(\lambda^Q)$ $Q(\tau > t) = e^{-\lambda^Q t}$ $Q(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda^Q t}$

$$P_{RT} = 100 e^{-rT} \mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{(\tau > T)} + (1-\delta)\mathbb{1}_{(\tau \le T)}] =$$

$$= 100 e^{-rT} \{\underbrace{Q(\tau > T)}_{e^{-\lambda^Q T}} + 0.60 \underbrace{Q(\tau \le T)}_{1-e^{-\lambda^Q T}}\} = 100 e^{-rT}\{0.4 e^{-\lambda^Q T} + 0.6\}$$

$$\underbrace{100 e^{-rT}}_{97}\{0.4 e^{-\lambda^Q T} + 0.6\} = 90 \Rightarrow 0.4 e^{-\lambda^Q T} = \frac{90}{97} - 0.6$$

$$\lambda^Q = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{1}{0.4}\frac{90}{97} - \frac{0.6}{0.4}\right) = 0.1989$$

(ii) $\overline{P}_{RT} =$ ~~[illegible]~~ $87€$ La seconda istituzione ha un'intensità di default maggiore in quanto il corrispondente DZCB ha un prezzo inferiore

$$\overline{\lambda}^Q = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{1}{0.4}\frac{87}{97} - \frac{0.6}{0.4}\right) = 0.2980 > 0.1989$$

Il rendimento di A: $90 = 100 e^{-R_A T}$

Il rendimento di B: $87 = 100 e^{-R_B T}$

$$\Rightarrow \frac{87}{90} = e^{-(R_B - R_A)T}$$

Il credit spread (differenza di rendimento tra B ed A): $R_B - R_A = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{87}{90}\right) = 0.034 = 3.4\%$

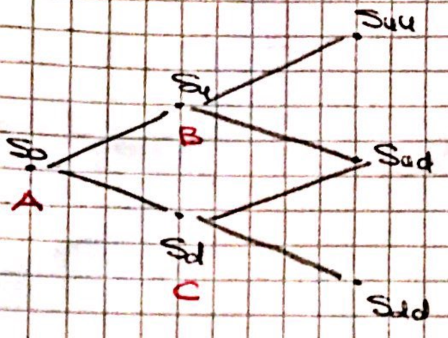
(3.4 punti base)

2) $S_0 = 45\ \$$ sale 5% scende 4% $r = 4\%$ 2 bimestri

$S_u = S_0 + 0{,}05\, S_0 = 45 \cdot 1.05 = 47.25\ \$$ $u = 1.05$ $S_{uu} = u\, S_u = 49.6125\ \$$

$S_d = S_0 - 0{,}04\, S_0 = 45 \cdot 0.96 = 43.2\ \$$ $d = 0.96$ $S_{ud} = d\, S_u = 45.36\ \$$

$S_{dd} = d\, S_d = 41.472\ \$$



$f_{uu} = 0$

$f_{ud} = (46 - S_{ud}) = 0.64$

$f_{dd} = (46 - S_{dd}) = 4.528$

$F(S_T) = (K - S_T)_+ = (46 - S_T)_+$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0.5187659 \qquad 1 - p = 0.481234$$

Procediamo a ritroso sull'albero:

$f_u = e^{-r\Delta t}\{ f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p)\} = 0.3059433\ \$$

$f_d = e^{-r\Delta t}\{ f_{du}\, p + f_{dd}(1-p)\} = 2.4943537\ \$$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{ f_u\, p + f_d(1-p)\} = 1.350051\ \$$

b) Put americana

Nodo B $f_u^* = \max\{ f_u, (46 - 47.25)_+\} = f_u$ non conviene l'esercizio anticipato

Nodo C $f_d^* = \max\{ f_d, (46 - 43{,}2)_+\} = 2.8$ conviene l'esercizio anticipato

Nodo A $f_0^* = \max\{ e^{-r\Delta t}(f_u^*\, p + f_d^*(1-p)), (46 - 45)_+\} = 1.496160 4$

c) Un investitore ha venduto 1'000 put. Quale strategia di copertura deve mettere in atto?

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = -0.540381$$

Al tempo $t=0$

Vende allo scoperto 540.381 azioni nel portafoglio detiene la somme

$$1'000 \cdot f_0 + 540.381 \cdot S_0 = 25'665.715 \$$$

Dopo 2 mesi

$$\Delta_1 = \begin{cases} \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = -0.1504997 & \text{se } S_1 = S_u \\ \dfrac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} = -1 & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

In caso di rialzo acquista: $540.381 - 150.4997 = 389.8484$ azioni

nel portafoglio ha: $25'665.715\, e^{r\Delta t} - 389.8484 \cdot S_u = 7'417.0545 \$$

In caso di ribasso vende allo scoperto altre $1'000 - 540.381 = 459.6519$

nel portafoglio ha: $25'665.715\, e^{r\Delta t} + 459.6519 \cdot S_d = 45'694.354 \$$

Verifichiamo la copertura: dopo 4 mesi acquista le azioni e chiude la posizione allo scoperto

$S_1 = S_u$ $$7'417.0545\, e^{r\Delta t} - 150.4997 \cdot S_T = \begin{cases} 0 = 100 f_{uu} & \text{se } S_T = S_{uu} \\ 640.00 = 100 f_{du} & \text{se } S_T = S_{ud} \end{cases}$$ ✓

$S_1 = S_d$ $$45'694.354\, e^{r\Delta t} - 1'000 \cdot S_T = \begin{cases} 640.001 = 100 f_{du} & \text{se } S_T = S_{ud} \\ 4'528.001 = 100 f_{dd} & \text{se } S_T = S_{dd} \end{cases}$$ ✓

3) $\sigma = 20\%$ $\quad r = 2\%$ $\quad T = 12$ mesi $\quad F_1(S_T) = (S_T)^2 \quad F_2(S_T) = (S_T)^4$

$$v_0^1 = \frac{e^{-rT}}{100} \mathbb{E}^Q[(S_T)^2] \qquad v_0^2 = \frac{e^{-rT}}{10'000} \mathbb{E}^Q[(S_T)^4]$$

$$S_T = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma W_T^Q}$$

$\{W_t^Q\}$ è moto browniano rispetto a Q $\qquad W_T^Q \sim N(0,T)$

$W_T^Q \sim \sqrt{T}\, N \qquad N \sim N(0,1)$

$$v_0^1 = \frac{e^{-rT}}{100} \mathbb{E}^Q\left[S_0^2 e^{2(r-\sigma^2/2)T} e^{2\sigma W_T^Q}\right] = e^{rT} e^{-\sigma^2 T} \frac{S_0^2}{100} \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{2\sigma\sqrt{T} N}\right]}_{= e^{\frac{4\sigma^2 T}{2}}}$$

$$v_0^1 = \frac{S_0^2}{100} e^{(r+\sigma^2)T} = \frac{30^2}{100} e^{(0.02+0.2^2)\cdot 1} = \frac{955.65 \$}{100} = 9.5565 \$$$

$$v_0^2 = \frac{e^{-rT}}{10'000} \mathbb{E}^Q\left[S_0^4 e^{4(r-\sigma^2/2)T} e^{4\sigma W_T^Q}\right] = e^{3rT} e^{-2\sigma^2 T} \frac{S_0^4}{10'000} \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[e^{4\sigma\sqrt{T} N}\right]}_{= e^{\frac{16\sigma^2}{2} T}}$$

$$v_0^2 = \frac{S_0^4}{10'000} e^{(3r+6\sigma^2)T} = \frac{1'093'385.68 \$}{10'000} = 109.34 \$$$

b) $v^1(t,x) = \dfrac{e^{-r(T-t)}}{100} \mathbb{E}^Q[(S_T)^2 \mid S_t = x] \qquad v^2(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[(S_T)^4 \mid S_t = x]$

$$S_T = S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q)}$$

$W_T^Q - W_t^Q \sim N(0, T-t)$

$\sim \sqrt{T-t}\, N \qquad N \sim N(0,1)$

$$v^1(t,x) = \frac{x^2}{100} e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

$$v^2(t,x) = \frac{x^4}{10'000} e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)}$$

Vende 100 derivati del primo tipo: deve acquistare $100 \dfrac{\partial V^1}{\partial x} = \dfrac{2x}{100} e^{(r+\sigma^2)(T-t)} \cdot 100$

$$\downarrow$$

$2x e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$ azioni

Acquista 10 derivati del secondo tipo: deve vendere $100 \dfrac{\partial V^2}{\partial x} = \dfrac{4x^3}{10'000} e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)} \cdot 100$

$$\downarrow$$

$$\frac{x^3}{25'000} e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)}$$

Delta complessivo è $100 \dfrac{\partial V^1}{\partial x} - 100 \dfrac{\partial V^2}{\partial x} = 2x e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - \dfrac{x^3}{5'000} e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)}$

al tempo $t=0$ $\quad \Delta_0 = 2 \cdot 30\, e^{(r+\sigma^2)(T)} - \dfrac{30^3}{25'000} e^{(3r+6\sigma^2)T} =$

$= 63.71 - 48.59 > 0$

e l'investitore deve acquistare 15 azioni