

1. (7 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente.

- a) Determinare il prezzo $p_{RT}(0, T)$ di un DZCB con recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta$, di valore nominale x e maturità T .
- b) Sia oggi il prezzo di un free-defaultable ZCB di valore nominale 100 euro, maturità $T = 3$ anni, pari a $p_0 = 97$ euro e quello di un DZCB, di stesso valore nominale e maturità, con Loss Given Default $\delta = 20\%$ pari a $p_{RT}(0, T) = 94$ euro. Determinare l'intensità di default λ^Q dell'istituzione finanziaria.
- c) Qual'è il valore il prezzo del DZCB tra 6 mesi?

2. (10 punti)

Il prezzo di un'azione è di 46\$. Ci si attende che in ciascuno dei due prossimi quadrimestri il prezzo salga del 2% o scenda del 2.5%. Il tasso d'interesse (annuo) privo di rischio composto continuamente è del 2%.

- a) Qual'è il valore di una call europea con prezzo di esercizio 45\$ e scadenza 8 mesi?
- b) Qual'è il valore della corrispondente call americana?
- c) Un investitore ha venduto 1000 call. Quale strategia di copertura deve mettere in atto? (Verificare la copertura)

3. (12 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha un tasso di rendimento atteso (annuo) del 6,2% e una volatilità (annua) pari al 25%. Il tasso d'interesse privo di rischio è del 3% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirà un derivato, con scadenza $T = 9$ mesi, di payoff finale $F(S_T) = (S_T)^{1/3}$ dove S_T è il prezzo dell'azione sottostante al tempo T . Oggi il prezzo dell'azione è di 10\$.

- a) Calcolare $P((S_T)^{1/3} > (10)^{1/3})$;
- b) Calcolare il prezzo v_0 del derivato al tempo $t = 0$;
- c) Calcolare il prezzo del derivato $v(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;
- c) L'istituzione finanziaria ha venduto 1.000 derivati, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4. (4 punti)

Il prezzo di un indice azionario è di 65\$ e il suo dividend yield è del 4% annuo. Il tasso d'interesse privo di rischio è del 3% annuo.

- a) Qual'è il prezzo future a 9 mesi dell'indice?
- b) Dopo 3 mesi il valore dell'indice è salito a 70\$. Qual'è in quel momento il valore unitario del contratto future?

1) $Q(t > t) = e^{-\lambda t}$ $t \geq 0$ $Q(t \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

2) $P_{RT}(0, T) = e^{-rT} E[x \mathbb{1}_{\{T > T\}} + x(1-\delta) \mathbb{1}_{\{T \leq T\}}] = x e^{-rT} [Q(T > T) + (1-\delta)Q(T \leq T)] = \frac{x}{1-Q(T > T)}$
 $= e^{-rT} x [1 - \delta Q(T > T) + \delta] = e^{-rT} x [1 - \delta + \delta e^{-\lambda T}]$

b) $P_0(0, T) = x e^{-rT} = 94e$ $T = 3$ anni $P_{RT}(0, T) = 94e$ $\delta = 0.2$ loss given default

$P_{RT} = P_0 [1 - \delta + \delta e^{-\lambda T}] \Rightarrow \frac{P_{RT}}{P_0} = 1 - \delta + \delta e^{-\lambda T} \Rightarrow e^{-\lambda T} = \left(\frac{P_{RT}}{P_0} - (1-\delta) \right) \frac{1}{\delta}$

$\lambda e = -\frac{1}{T} \log \left(\frac{P_{RT}}{P_0 \delta} - \frac{1-\delta}{\delta} \right) = -\frac{1}{3} \log \left(\frac{94}{97 \cdot 0.2} - \frac{0.8}{0.2} \right) = 0.05533 \approx 0.056$

Indicatore del default

c) $P_{RT}(t, T) = e^{-r(T-t)} E[x \mathbb{1}_{\{T > T\}} + x(1-\delta) \mathbb{1}_{\{T \leq T\}} | Y_t] =$
 $= e^{-r(T-t)} x E[1 - \mathbb{1}_{\{T > T\}} + (1-\delta)(1 - \mathbb{1}_{\{T > T\}}) | Y_t] =$
 $= e^{-r(T-t)} x [E[1 | Y_t] - \mathbb{1}_{\{T > T\}} + (1-\delta)(1 - \mathbb{1}_{\{T > T\}})] = e^{-r(T-t)} x [1 - \mathbb{1}_{\{T > T\}} + (1-\delta)(1 - \mathbb{1}_{\{T > T\}})]$

Calcoliamo $E[1 - \mathbb{1}_{\{T > T\}} | Y_t] = E[1 | Y_t] - E[\mathbb{1}_{\{T > T\}} | Y_t] = 1 - Q(T > T | T > t) = 1 - Q(T > T) = e^{-\lambda(T-t)}$

$P_{RT}(t, T) = x e^{-r(T-t)} [1 - \delta + \delta e^{-\lambda(T-t)}] \mathbb{1}_{\{T > t\}}$

Ricavo r : $100 e^{-3r} = 97$ $e^{-3r} = \frac{97}{100}$
 Sapendo che non c'è stato ancora il default:

$P_{RT} = 100 e^{-r \cdot 2.5} [0.8 + 0.2 e^{-\lambda \cdot 2.5}] = 73.86 e$
 $\frac{0.082}{0.30}$

$r = -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{97}{100} \right) = 0.01015$

$t = 0.5$ anni
 $T - t = 2.5$ anni

4) Indice azionario $S_0 = 65 \$$ $q = 4\%$ annuo $r = 3\%$ annuo

a) Prezzo futures a 3 mesi
 $F_0 = S_0 e^{(r-q)T} = 65 e^{(0.03 - 0.04) \times \frac{3}{12}} = 64.51 \$$

b) Data 4 mesi $S_t = 70 \$$. Valore del contratto per la posizione lunga è:

$$F_t = (F_0 - F_0) e^{-r(T-t)} = 70 e^{(0.03 - 0.04) \times \frac{5}{12}} = 69.71 \$$$

$$\Rightarrow f_t = (69.71 - 64.51) e^{-0.03 \times \frac{5}{12}} = 5.13 \$$$

2) $S_0 = 46 \$$ 2 quadrimestri il prezzo sale del 2% e scende del 2.5% $r = 2\%$

call $T = 8$ mesi $K = 45 \$$ $(S_T - K)^+$ payoff

$$S_u = 46 + 46 \times 0.02 = 46.92 \$ \quad u = 1.02 \quad S_{uu} = u S_u = 47.8584$$

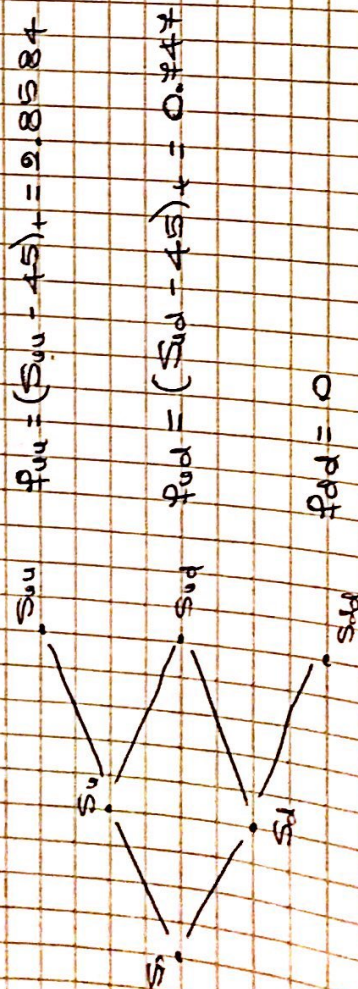
$$S_d = 46 - 46 \times 0.025 = 44.85 \$ \quad d = 0.975 \quad S_{ud} = d S_u = 45.747$$

$$S_{dd} = d S_d = 43.72875$$

$$f_{uu} = (S_{uu} - 45)^+ = 2.8584$$

$$f_{ud} = (S_{ud} - 45)^+ = 0.747$$

$$f_{dd} = 0$$



$$P = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.02 \times \frac{4}{12}} - 0.975}{1.02 - 0.975} = 0.704197$$

$$e^{r\Delta t} = 1.0066889$$

$$e^{-r\Delta t} = 0.9933555$$

Procediamo a ritroso sull'albero:

$$f_u = e^{r\Delta t} \{ f_{uu}p + f_{ud}(1-p) \} = 2.219 \$ \quad f_d = e^{r\Delta t} \{ f_{ud}p + f_{dd}(1-p) \} = 0.5225404 \$$$

$$f_0 = e^{r\Delta t} \{ f_{up} + f_{dp}(1-p) \} = 1.7097737 \$$$

b) Poiché le titoli con offre dividendi non è mai ottimale esercitare anticipatamente una call,

dunque la call americana ha lo stesso valore delle call europee

c) Un investitore che vende 1000 call. La strategia di copertura è data da $\{(\Delta_0, e_0), (\Delta_1, e_1)\}$

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = 0.8195459 \quad \text{al tempo } t=0 \text{ l'investitore acquista } 819,5459 \text{ azioni e}$$

$$\text{prende in prestito } (\Delta_0 S_0 - f_0)1000 = 35.993.33 \$$$

Al tempo $t = 4 \text{ mesi}$

$$\Delta_{1,u} = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 1$$

$$\text{e } S_1 = S_u$$

$$\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_{1,u} = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 0.3701226 & \text{se } S_1 = S_u \\ \Delta_{1,d} = \frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_{ud} - S_{dd}} & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

Se $S_1 = S_u$ vende 819.5458 - 370.1226 = 449.4282 azioni in prestito le: $35.993.33 e^{r\Delta t} - 449.4282 \times S_d = 16.077.458 \$$

Verifico la copertura:

$$S_1 = S_u \quad \text{Vende le azioni e restituisce il prestito} \quad 1000 S_T - 44.701 e^{r\Delta t} \sim 1000 f_{uu}$$

$$S_1 = S_d \quad \text{Vende le azioni e restituisce il prestito} \quad 370.1226 - 16.077 e^{r\Delta t} \sim 370.1226 S_d - 16.077 e^{r\Delta t} \sim 0$$

Se $S_1 = S_u$ acquista altre

$$1000 - 819.5459 = 180.4542 \text{ azioni}$$

$$\text{in prestito le: } 35.993.33 e^{r\Delta t} + 180.4542 S_u = 44.701 \$$$

$$\text{Se } S_T = S_{uu} \quad 1000 S_{uu} - 44.701 e^{r\Delta t} \sim 1000 f_{uu} \\ \text{e } S_T = S_{ud} \quad 1000 S_{ud} - 44.701 e^{r\Delta t} \sim 1000 f_{ud}$$

$$\text{Se } S_T = S_{dd} \quad 370.1226 S_{dd} - 16.077 e^{r\Delta t} \sim 0 \\ \text{e } S_T = S_{ud} \quad 370.1226 S_{ud} - 16.077 e^{r\Delta t} \sim 1000 f_{ud}$$

3) $\mu = 6.2\%$ $\sigma = 25\%$ $r = 3\%$ $T = 10 \text{ anni}$ $S_0 = 10 \$$

Modello Black & Scholes

$$S_T = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \omega_T}$$

$\omega_t \in \mathcal{N}(0, T)$ moto browniano

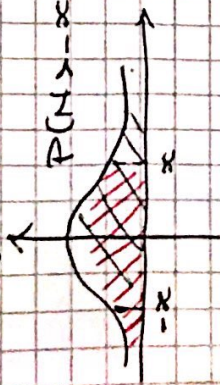
$$\omega_t \sim \mathcal{N}(0, t) \quad \omega_t \sim \sqrt{t} \in \mathcal{N}$$

$$P(S_T)^{1/3} > (10)^{1/3} = P(S_T > 10) =$$

$$= P(S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \omega_T} > 10) = P(e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \omega_T} > 1) =$$

$$= P((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \omega_T > 0) = P(\sigma \omega_T > -(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T) = P(N > -\frac{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}) = 1$$

$$= P(N > -\frac{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}) = P(N > -\frac{(0.062 - 0.025^2)}{0.25}) = P(N > -0.123) = \Phi(0.123) \approx 0.55$$



$$P(N > -x) = P(N < x) = \Phi(x)$$

b) $V_0 = e^{-rt} E[(S_T)^{1/3}] = e^{-rt} E[(S_0)^{1/3} e^{\frac{1}{3}(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \frac{\sigma}{3}\omega_T}] =$
 prezzo al tempo $t=0$

risultato a T :
 $S_T = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \omega_T}$

$$= e^{-rt} e^{\frac{\sigma^2}{6}T} E[e^{\frac{\sigma}{3}\omega_T} N] \frac{1}{\sqrt{S_0}} = \sqrt[3]{S_0} e^{\frac{\sigma^2}{6}T} e^{-\frac{1}{6}\sigma^2 T} = \sqrt[3]{S_0} e^{\frac{\sigma^2}{6}(1-\frac{1}{6}\sigma^2)T}$$

$$V_0 = e^{-rt} 10 e^{\frac{\sigma^2}{6}(0.03 - \frac{1}{6}0.25^2) \times \frac{10}{12}} = 9.11 \$$$

c)

Prezzo al tempo t se $S_t = x$: $V(t, x) = e^{-r(T-t)} E[(S_T)^{1/3} | S_t = x] =$
 $= \sqrt[3]{x} e^{\frac{\sigma^2}{6}(1-\frac{1}{6}\sigma^2)(T-t)}$

se calcola si segue.
tenendo conto che

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} + \sigma(\omega_T^0 - \omega_t^0)$$

$$\omega_T^0 - \omega_t^0 \sim N(0, T-t)$$

$$\sim \sqrt{T-t} \quad N \sim N(0,1)$$

d) 1000 derivati

$$\Delta(t, x) \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}$$

$$e^{\frac{\sigma^2}{2}(0.03 - 0.25 \frac{1}{2})} \times \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta(0, S_0) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{10^3}$$

$$= 0.072$$

è investita
deve acquistare 72 azioni
al tempo $t=0$