Scritto del 13/01/22

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (6 punti)
Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente. Il valore di mercato al $t = 0$ mesi di un free-defaultable ZCB di maturitá $T = 9$ mesi e valore nominale 100 euro é pari a 98 euro.

a) Sia $p_{RT}(0, T)$ il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB di maturitá $T = 9$ mesi e di valore nominale 100 euro e recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 0,60$ é pari a 92 euro. Determinare l'intensitá di default λ^Q dell'istituzione finanziaria.

b) Calcolare il prezzo, $p_{FV}(0, T)$, al tempo $t = 0$ di un DZCB di maturitá $T = 9$ mesi e di valore nominale 100 euro e recovery of treasury pagato al tempo di default pari a $1 - \delta = 0,60$.

3. (12 punti) Il prezzo di un'azione é di 18\$. Ci si attende che in ciascuno dei prossimi trimestri il prezzo salga del 2% o scenda del 2%. Il tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente é del 2% annuo.

a) Qual'é il valore di una put europea con prezzo d'esercizio 18\$ e scadenza 9 mesi?

b) Qual'é il valore dell una put americana corrispondente?

c) Un investitore ha venduto 1.000 put. Quale strategia di copertura deve mettere in atto in caso di ribasso alla fine del primo trimestre e di rialzo alla fine del secondo trimestre? (Verificare la copertura)

3. (11 punti)
Un titolo che non paga dividendi ha una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá due derivati, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale $F_1(S_T) = \frac{5000}{S_T^2}$ dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T.
Oggi il prezzo dell'azione é di 50\$.
Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:

a) il prezzo v_0 del derivato oggi;

b) il prezzo del derivato $v(t, x)$ al tempo t se $S_t = x$;

c) L'istituzione finanziaria ha venduto 100 derivati quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

4 (4 punti) Scrivere e dimostrare la relazione di paritá put-call relativa a opzioni europee scritte su titoli che non offrono dividendi.

Scansionato con CamScanner

Scritto del 13/01/2022 Titoli Derivati e Gestione del Rischio I

1) Vedere le soluzioni dei punti (i) e (ii) del parziale del 13/01/22

2) $S_0 = 18\$$ 3 trimestri: alla fine di ogni trimestre il prezzo sale del 2% e scende del 2%.

$r = 2\%$ put europea $K = 18\$$ $f(S_T) = (18 - S_T)_+$

$T = 9$ mesi

$$S_u = S_0 + S_0 \cdot 0.02 = S_0 \cdot \overbrace{1.02}^{u} = 18.36\$$$

$$S_d = S_0 - S_0 \cdot 0.02 = S_0 \cdot \underbrace{0.98}_{d} = 17.64\$$$

$S_{uu} = 18.7272\$$

$S_{ud} = 17.9928\$$

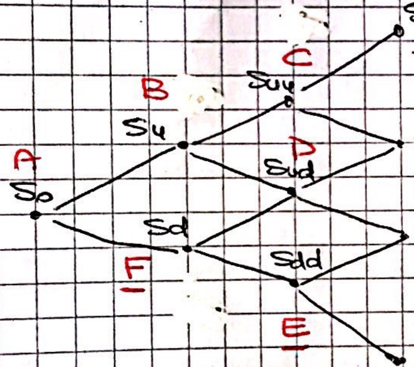
$S_{dd} = 17.2872\$$

$S_{uuu} = 19.101744\$$

$S_{uud} = 18.352656\$$

$S_{udd} = 17.632944\$$

$S_{ddd} = 16.941456\$$



S_{uuu}

$f_{uuu} = 0 = (18 - S_{uuu})_+$

S_{uud}

$f_{uud} = (18 - S_{uud})_+ = 0$

S_{udd}

$f_{udd} = (18 - S_{udd})_+ = 0.367056\$$

S_{ddd}

$f_{ddd} = (18 - S_{ddd})_+ = 1.058544\$$

Misura neutrale al rischio: la probabilità di rialzo è data da

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.02 \cdot 3/12} - 0.98}{1.02 - 0.98} = 0.62531302 1$$

probabilità di ribasso: $1 - p = 0.374686978$

Procediamo a ritroso sull'albero:

$f_{uu} = e^{-r\Delta t}\{ f_{uuu}p + f_{uud}(1-p)\} = 0$

$f_{ud} = e^{-r\Delta t}\{ f_{uud}p + f_{udd}(1-p)\} = 0.136845164$

$f_{dd} = e^{-r\Delta t}\{ f_{udd}p + f_{ddd}(1-p)\} = 0.623024624$

$f_{u} = e^{-r\Delta t}\{ f_{uu}p + f_{ud}(1-p)\} = 0.051018837$

$f_{d} = e^{-r\Delta t}\{ f_{du}p + f_{dd}(1-p)\} = 0.317419206$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{ f_u p + f_d(1-p)\} = 0.150083\ \$$
prezzo put

(b) Put americane $\quad v_i^*(s) = \max\{ (18-s),\ e^{-r\Delta t}[v_{i+1}^*(su)p + v_{i+1}^*(sd)(1-p)]\}$

prezzo al tempo $i\Delta t$ se $S_i = s$

$f_{uu}^* = \max\{(18-18.7272),\ f_{uu}\} = 0$ non conviene l'esercizio anticipato al nodo C

$f_{ud}^* = \max\{(18-17.9928),\ f_{ud}\} = f_{ud} = 0.136845164$ " " " D

$f_{dd}^* = \max\{(18-17.2872),\ f_{dd}\} = 0.7128\ \$$ Conviene l'es. anticipato al nodo E

$f_u^* = \max\{(18-18.36),\ e^{-r\Delta t}(f_{uu}^* p + f_{ud}^*(1-p))\} = f_u$ non conviene l'es. anticipato al nodo B

$f_d^* = \max\{(18-17.64),\ e^{-r\Delta t}(f_{ud}^* p + f_{dd}^*(1-p))\} = \max\{0.36,\ 0.35\} = 0.36$

Conviene l'es. anticipato al nodo F

$f_0^* = \max\{18-18,\ e^{-r\Delta t}(f_u^* p + f_d^*(1-p))\} = 0.16596$

non conviene l'es. anticipato al nodo A

Scansionato con CamScanner

(c) L'investitore ha venduto 1'000 put.

Strategia di copertura

$\Delta_0 = \dfrac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = -0.370$ deve vendere allo scoperto 370 azioni, nel portafoglio detiene la somma:

$370 \times S_0 + 1'000 \times f_0 = 6'810.083$ \$

Dopo 3 mesi in caso di ~~rialzo~~ ribasso: $S_1 = S_d$

$\Delta_{1,d} = \dfrac{f_{du} - f_{dd}}{S_{du} - S_{dd}} = -0.689029846$ deve vendere allo scoperto altre $689.029846 - 370 = 319.029846$ azioni

nel portafoglio ha: $6'810.83\, e^{r\Delta t} + 319.029846 \cdot S_d = 12'471.90518$ \$

Dopo 6 mesi in caso di rialzo: $S_2 = S_{du}$

$\Delta_{2,du} = \dfrac{f_{duu} - f_{dud}}{S_{duu} - S_{dud}} = -0.510004$ deve acquistare $689.029846 - 510.004 = 179.02584$ azioni

nel portafoglio ha $12'471.90518\, e^{r\Delta t} - 179.02584 \cdot S_{du} = 9'313.244625$ \$

Verifichiamo la copertura al tempo T: acquista 510 azioni e chiude la posizione allo scoperto

$$9'313.244625\, e^{r\Delta t} - 510.004 \cdot S_T = \begin{cases} 0 = 1'000\, f_{uud} & \text{se } S_T = S_{uud} \\ 364.05549 \simeq 1'000\, f_{udd} & \text{se } S_T = S_{udd} \end{cases}$$

3) Si veda soluzioni parziale del 13/01/22

Scansionato con CamScanner

Parziale del 13/01/22

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio I

Prof.ssa Claudia Ceci

1. (15 punti)

Sia Q una misura neutrale al rischio e τ il tempo di default di una nota istituzione finanziaria di distribuzione esponenziale $\lambda^Q > 0$. Sia $r > 0$ il tasso d'interesse composto continuamente. Il valore di mercato al $t = 0$ mesi di un free-defaultable ZCB di maturitá $T = 9$ mesi e valore nominale 100 euro é pari a 98 euro.

(i) Sia $p_{RT}(0,T)$ il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB di maturitá $T = 9$ mesi e di valore nominale 100 euro e recovery of treasury (pagato alla scadenza) pari a $1 - \delta = 0,60$ é pari a 92 euro. Determinare l'intensitá di default λ^Q dell'istituzione finanziaria.

(ii) Calcolare il prezzo, $p_{FV}(0,T)$, al tempo $t = 0$ di un DZCB di maturitá $T = 9$ mesi e di valore nominale 100 euro e recovery of treasury pagato al tempo di default pari a $1 - \delta = 0,60$.

(ii) Sia $\bar{p}_{RT}(0,T)$ il prezzo al tempo $t = 0$ di un DZCB analogo al punto (i) (stesso valore nominale, recovery e maturitá) emesso da un'altra istituzione finanziaria pari a 87 euro. Quale delle due istituzioni ha un rischio di default maggiore? Determinare il loro spread creditizio.

2. (18 punti)

Un titolo che non paga dividendi ha una volatilitá (annua) pari al 20%. Il tasso d'interesse privo di rischio e' del 2% annuo. Un'istituzione finanziaria ha reso noto che offrirá due derivati, con scadenza $T = 12$ mesi, di payoff finale $F_1(S_T) = \frac{5.000}{S_T^2}$ e $F_2(S_T) = log(S_T)$ dove S_T é il prezzo dell'azione sottostante al tempo T.

Oggi il prezzo dell'azione é di 50\$.

Utilizzando la valutazione neutrale verso il rischio calcolare:

a) il prezzo v_0^1 e v_0^2 dei due derivati oggi;

b) il prezzo dei derivati $v^1(t,x)$ e $v^2(t,x)$ al tempo t se $S_t = x$;

c) L'istituzione finanziaria ha venduto 100 derivati di del primo tipo e acquistato 100 derivato del secondo tipo, quante azioni deve acquistare/vendere al tempo $t = 0$ per coprirsi dal rischio?

Scansionato con CamScanner

II Parziale Titoli derivati e gestione del Rischio I 10/01/2022

1.) $\tau \sim \exp(\lambda^{\mathbb{Q}}) \qquad \mathbb{Q}(\tau > t) = e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} t} \qquad t > 0$

$$P_0(0,T) = 100\, e^{-rT} = 98 € \qquad T = 9 \text{ mesi}$$

(i) $P_{RT}(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x e^{-rT} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + x(1-\delta)\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}\right] = x e^{-rT}\{\mathbb{Q}(\tau > T) + (1-\delta)\overbrace{\mathbb{Q}(\tau \le T)}^{1-\mathbb{Q}(\tau > T)}\}$

$$= x e^{-rT}\{(1-\delta) + \delta\, \mathbb{Q}(\tau > T)\} = x e^{-rT}\{(1-\delta) + \delta e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} T}\}$$

$$P_{RT}(0,T) = P_0(0,T)\left[1-\delta + \delta e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} T}\right]$$

$$\frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)} = 1-\delta + \delta e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} T} \Rightarrow e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} T} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{P_{RT}(0,T)}{P_0(0,T)} - 1 - \delta\right) = 0.8469387$$

$\delta = 0.4 \qquad 1-\delta = 0.6$

$$\lambda^{\mathbb{Q}} = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{P_{RT}(0,T)}{\delta P_0(0,T)} - \frac{1-\delta}{\delta}\right) = -\frac{12}{9}\ln\left(\frac{92}{0.4 \cdot 98} - \frac{0.6}{0.4}\right) = +\frac{12}{9} \cdot 0.166127 = 0.22$$

(ii) $P_{FV}(0,T) = x\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-rT} + (1-\delta)\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} e^{-r\tau}\right] =$

$$= P_0(0,T)\, e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} T} + x(1-\delta)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} e^{-r\tau}\right]$$

calcoliamo $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} e^{-r\tau}\right] = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{t \le T\}} e^{-rt} \lambda^{\mathbb{Q}} e^{-\lambda^{\mathbb{Q}} t}\, dt = \int_0^T \lambda^{\mathbb{Q}} e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})t}\, dt =$

$$= -\frac{\lambda^{\mathbb{Q}}}{r+\lambda^{\mathbb{Q}}} e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})t}\Big|_0^T = \frac{\lambda^{\mathbb{Q}}}{r+\lambda^{\mathbb{Q}}}\left(1 - e^{-(r+\lambda^{\mathbb{Q}})T}\right)$$

1

$$P_{FV}(0,T) = P_0(0,T) \cdot \{ e^{-\lambda^Q T} + 100 \frac{(1-\delta)\lambda^Q}{r+\lambda^Q} \left(1 - e^{-(r+\lambda^Q)T}\right) \}$$

$$= 98 \cdot \{ e^{-0.22 \cdot 9/12} + 100 \frac{0.6 \cdot 0.22}{r + 0.22} \left(1 - e^{-(r+0.22)9/12}\right) \}$$

per il calcolo è necessario il valore di r che determiniamo dal valore di P_0:

$$98 = 100\, e^{-rT} \Rightarrow e^{-rT} = \frac{98}{100} \qquad r = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{98}{100}\right) = 0.027$$

$$P_{FV}(0,T) = 98 \cdot 0.84789 + 53.442 \, (1 - 0.83) = 92.18\,€ > P_{RT}(0,T)$$

è coerente con il fatto che il recupero avviene al tempo di default

(ii) $\bar{P}_{RT}(0,T) = 87\,€$ $\qquad P_{RT}(0,T) = 92\,€$

$\bar{P}_{RT} < P_{RT} \Rightarrow$ la seconda istituzione ha un intensità di default + alta

credit spread: $c = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{\bar{P}_{RT}}{P_{RT}}\right) = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{87}{92}\right) = 0.0745$

7.45 punti base

2) $r = 2\%$ $\quad F_1(S_T) = \frac{1}{S_T^2}$ $\quad F_2(S_T) = \lg(S_T)$ $\quad S_0 = 50\,\$$

$\sigma = 20\%$

Modello di Black & Scholes:

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \omega_T^Q}$$

$\{\omega_t^Q\}_{t \geq 0}$ Q- moto browniano

Q misura neutrale al rischio

$\omega_T^Q \sim \mathcal{N}(0, T)$

$\omega_T^Q \sim \sqrt{T}\, N$

$\mathbb{E}[e^{aN}] = e^{\frac{a^2}{2}}$

a) $v_0^1 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^Q[(S_T)^{-2}] \cdot 5000$

$$= 5000\, e^{-rT} (S_0)^{-2} e^{-2(r - \frac{\sigma^2}{2})T} \underbrace{\mathbb{E}^Q[e^{-2\sigma \omega_T^Q}]}_{e^{4\frac{\sigma^2}{2}T}}$$

5000

$$v_0^1 = \Gamma(S_0)^{-2} e^{-3rT} e^{+\sigma^2 T} e^{2\sigma^2 T} = (S_0)^{-2} e^{-3rT} e^{3\sigma^2 T} \cdot 5000$$

$$= \frac{5000}{50^2} e^{-3 \cdot 0.02} e^{3 \cdot 0.2^2} = 2.1237\,\$$$

$$v_0^2 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^Q[\lg(S_T)] = e^{-rT}\{\lg(S_0) + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})T + \underbrace{\mathbb{E}^Q[\sigma \omega_T^Q]}_{=0}\}$$

$$v_0^2 = e^{-rT}\{\lg(S_0) + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})T\} = e^{-0.02}\{\lg(50) + (0.02 - \tfrac{0.2^2}{2})\} = \lg(50)\, e^{-0.02} = 3.8346\,\$$$

b) $v^1(t, x) = 5000\, e^{-r(T-t)}\, \mathbb{E}^Q[(S_T)^{-2} \mid S_t = x]$ $\quad$ tenendo conto che

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(\omega_T^Q - \omega_t^Q)}$$

$$\omega_T^Q - \omega_t^Q \sim \mathcal{N}(0, T-t)$$

$$= \frac{5000}{x^2} e^{3(\sigma^2 - r)(T-t)}$$

$$v^2(t, x) = e^{-r(T-t)}\{\lg(x) + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-t)\}$$

Scansionato con CamScanner

$$\frac{\partial V^1}{\partial x} = -2 \cdot \frac{5000}{x^3} e^{3(\sigma^2 - r)(T-t)} \qquad D(x^{-2}) = -2x^{-3}$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} = \frac{1}{x} e^{-r(T-t)} \qquad D(\log x) = \frac{1}{x}$$

Nel portafoglio di copertura al tempo t ~~...~~ se $S_t = x$ deve avere:

$$100 \frac{\partial V^1}{\partial x} - 100 \frac{\partial V^2}{\partial x} = -\frac{10\cdot000}{x^3} e^{3(\sigma^2 - r)(T-t)} - \frac{100}{x} e^{-r(T-t)} \text{ azioni}$$

al tempo $t=0$

$$-\frac{10\cdot000}{50^3} e^{100 \cdot 3(0.2^2 - 0.02)} - \frac{100}{50} e^{-0.02} = -8.49 - 1.96 = -10.45 \text{ azioni}$$

deve vendere allo scoperto 10.45 azioni.